УДК 517.55

Л. И. РОНКИН

ОБОБЩЕННЫЕ ОБЛАСТИ ГАРТОГСА

Пусть D — область в $\boldsymbol{C}$, K — связная компонента ∂D. Предположим, что ∂D не содержит иррегулярных точек и, следовательно, в D существует гармоническая функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{z\to z^0,\ z\in D} \omega(z)=0,\ \forall z\in K, \qquad \lim_{z\to z^0\ z\in D} \omega(z)=1,\ \forall z\in\partial D\setminus K.$$

Обобщенной областью Гартогса с направляющей плоскостью назовем любую область вида

$$G=\{(w,\ z): w\in {}'G\subset \boldsymbol{C}^n,\ \omega(z)<\lambda_G(w)\},\tag{1}$$

где $'G$ — область в $\boldsymbol{C}^n$, называемая в дальнейшем основанием области G, а $\lambda_G(w)$ — положительная функция. Очевидно, равенство (1) определяет область лишь в случае, когда функция $\lambda_G(w)$ полунепрерывна снизу.

Обобщенные области Гартогса специального вида естественно возникают при изучении некоторых вопросов сепаратной квазианалитичности (см. [1—4]).

При $\omega=A\ln|z|+B$, что соответствует случаю, когда D — кольцо, обобщенная область Гартогса совпадает с обычной.

Рассмотрим какую-нибудь функцию $f(w,\ z)$, $w\in\boldsymbol{C}^n$, $z\in\boldsymbol{C}$, голоморфную в обобщенной области Гартогса G. Обозначим через

$\Lambda_f(w^0)$, $w^0 \in {}'G$ точную верхнюю грань тех чисел t, для которых функция $f(w^0, z)$ продолжается как голоморфная функция от z на область $\{z : \omega(z) < t\}$. Через $\Lambda^*_f(w^0)$ обозначим точную верхнюю грань тех чисел t, для которых функция $f(w, z)$ продолжается как голоморфная функция от w и z на множество $\{(w, z) : w = w^0, \omega(z) < t\}$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{|w - w^0| < \varepsilon} \Lambda_f(w) = \Lambda^*_f(w^0). \tag{2}$$

В случае, когда G — обычная область Гартогса и, стало быть, $\omega(z) = A\, ln|z| + B$, величины $\Lambda_f(w)$ и $\Lambda^*_f(w)$ — линейны (соответственно) относительно $\ln R_f(w)$ и $\ln R^*_f(w)$, где $R_f(w)$ — радиус сходимости, а $R^*_f(w)$ — радиус равномерной сходимости ряда Гартогса функции $f(z, w)$.

Хорошо известно, что $-\ln R^*_f(w)$ является плюрисубгармонической функцией. Докажем, что аналогичный факт имеет место и для обобщенных областей Гартогса.

Теорема. *Пусть G — обобщенная область Гартогса и пусть $f(w, z)$ — функция, голоморфная в G. Тогда функция $-\Lambda^*_f(w)$ плюрисубгармонична в области ${}'G$.*

Доказательство*. Рассмотрим функцию $-\Lambda^*_f(\zeta w + a)$, где $\zeta \in \boldsymbol{C}$, $w \in \boldsymbol{C}^n$, $a \in \boldsymbol{C}^n$. Докажем ее субгармоничность.

Пусть $\zeta_0 \in \boldsymbol{C}$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что $\{\zeta w + a\} \in {}'G$ при $|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon$. Пусть, далее, $g(\zeta)$ — произвольная функция, гармоническая в круге $|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon$, непрерывная в замкнутом круге $|\zeta - \zeta_0| \leqslant \varepsilon$ и такая, что

$$g(\zeta) \leqslant \Lambda^*_f(\zeta w + a), \quad \forall \zeta : |\zeta - \zeta_0| = \varepsilon. \tag{3}$$

Ввиду соотношения (2) для доказательства субгармоничности по ζ функции $-\Lambda^*_f(\zeta w + a)$ достаточно показать, что из неравенства (3) вытекает неравенство

$$\Lambda_f(\zeta w + a) \geqslant g(\zeta), \quad \forall \zeta : |\zeta - \zeta_0| < \varepsilon. \tag{4}$$

Очевидно, что при этом следует рассматривать лишь функции $g(\zeta)$, удовлетворяющие условию $0 < g(\zeta) < 1$.

Из определения функций Λ^*_f и g вытекает, что функция $\varphi_{a, w}(\zeta, z) = f(\zeta w + a, z)$ голоморфна в точках множества $\{(\zeta, z) : |\zeta - \zeta_0| = \varepsilon, \omega(z) < g(\zeta)\}$, и для доказательства неравенства (4) достаточно показать аналитичность функции $\varphi_{a, w}(\zeta, z)$ на множестве $\{(\zeta, z) : |\zeta - \zeta_0| \leqslant \varepsilon, w(z) < g(\zeta)\}$. Это является следствием леммы, представляющей на наш взгляд самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть функция $\omega(z)$ та же, что и прежде, а $g(\zeta)$, $0 < g(\zeta) < 1$ — функция, гармоническая в круге $|\zeta| < R$ и непрерывная в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant R$. Пусть, далее, функция $f(\zeta, z)$ — голоморфна на множестве $\{(\zeta, z) : |\zeta| \leqslant R, \omega(z) < \delta\} \cup$*

---

* Доказательство плюрисубгармоничности функции $-\ln R^*_f(w)$ не переносится на случай функции $-\Lambda^*_f(w)$, т. е. на случай обобщенных областей Гартогса, поскольку для них не существует хорошего аналога ряда Гартогса.

$\bigcup \{(\zeta, z) : |\zeta| = R, \omega(z) < g(\zeta)$, *где* $0 < \delta < \min\limits_{|\zeta| \leqslant R} g(\zeta)$. *Тогда функция* $f(\zeta, z)$ *голоморфно продолжается на область* $\{(\zeta, z) : |\zeta| < R, \omega(z) < g(\zeta)\}$.

Доказательство. Обозначим через T точную верхнюю грань тех чисел $t < 1$, для которых функция $f(\zeta, z)$ продолжается голоморфно из области $\{(\zeta, z) : |\zeta| < R, \omega(z) < \delta\}$ на область $G_t = \{(\zeta, z) : |\zeta| < R, \omega(z) < tg(\zeta)\}$. Очевидно, что $T > \delta (\sup\limits_{|\zeta| < R} g(\zeta))^{-1} > 0$ и $T \leqslant 1$. Предположим, что $T < 1$. Тогда должна существовать точка (ζ^0, z^0), являющаяся особой точкой функции $f(\zeta, z)$ и такая, что $|\zeta^0| < R$, $\omega(z^0) = Tg(\zeta^0)$, $z^0 \in D$. Покажем, что это невозможно.

Пусть $z = z(\lambda)$ — голоморфное локально одноместное отображение единичного круга на область D. Такое отображение существует согласно теореме об униформизации римановых поверхностей. Пусть, далее, $F(\zeta, \lambda) = f(\zeta, z(\lambda))$. Очевидно, что функция $F(\zeta, \lambda)$ голоморфна в области $B_T = \{(\zeta, \lambda) : |\zeta| < R, |\lambda| < 1, \omega(z, \lambda) < Tg(\lambda)\}$. Эта область является аналитическим полиэдром. В этом легко убедиться представив область B_T в виде $B_T = \{(\zeta, \lambda) : |\zeta| < R, |\lambda| < 1, |\Phi_T(\zeta, \lambda)| < 1\}$, где $\Phi_T(\zeta, \lambda) = \exp\{h(\zeta) + \Omega(\lambda)\}$, а $h(\zeta)$ и $\Omega(\lambda)$ — функции, голоморфные, соответственно, при $|\zeta| < R$ и $|\lambda| < 1$, и такие, что $\mathrm{Re}\, h(\zeta) = -Tg(\zeta)$, $Re\Omega(\lambda) = \omega(z(\lambda))$.

Поскольку функция $f(\zeta, z)$ — голоморфна на множестве $\{(\zeta, z) : |\zeta| = R, \omega(z) < g(\zeta)\}$, то функция $F(\zeta, \lambda)$ голоморфна на множестве $\{(\zeta, z) : |\zeta| = R, |\Phi_T(\zeta, \lambda) \leqslant 1\}$. Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $F(\zeta, \lambda)$ голоморфна и когда $R - \varepsilon < |\zeta| < R$, $|\Phi_T(\zeta, \lambda)| < 1 + \varepsilon$. Отсюда, как будет показано, следует, что ни одна точка «грани» $B_T^* = \{(\zeta, \lambda) : (\zeta, \lambda) \in \overline{B}_T, |\lambda| < 1, |\Phi_T(\zeta, \lambda)| = 1\}$ не может быть особой точкой функции $F(\zeta, \lambda)$.

Действительно, пусть $B = B_T \bigcup \{(\zeta, \lambda) : R - \varepsilon < |\zeta| < R, |\Phi_T(\zeta, \lambda)| < 1 + \varepsilon\}$ и $H = \{(\zeta, \lambda) : |\zeta| = R, |\Phi_T(\zeta, \lambda)| = 1\}$. Тогда $H \subset B$ и, следовательно, при некотором $\eta > 0$, η — окрестность $(H)_\eta$ множества H содержится в B. Рассмотрим множество $\Gamma_0 = \{(\zeta, \lambda) : |\zeta| < R, \Phi_T(\zeta, \lambda) = e^{i0}\}$. Очевидно, что для всех θ, исключая быть может некоторое счетное множество E, равенство $\mathrm{rank}\, \Phi_T = 1$ имеет место во всех точках $(\zeta, \lambda) \in \Gamma_\theta$. Поэтому Γ_0 при $\theta \notin E$ является комплексным многообразием. Краем этого многообразия является множество (кривая) $\partial\Gamma_0 = \{(\zeta, \lambda) : |\zeta| = R, \Phi_T(\zeta, \lambda) = e^{i\theta}\}$. Так как $\partial\Gamma_0 \subset H$, то η — окрестность $(\partial\Gamma_\theta)_\eta$ множества $\partial\Gamma_\theta$ содержится в B. Заметим, что для любой голоморфной в B функции ψ справедливо равенство $\sup\limits_{\Gamma_\theta} |\psi| = \max\limits_{\partial\Gamma_0} |\psi|$. Это означает, что в B голоморфно выпуклая оболочка множества $\partial\Gamma_\theta$ совпадает с $\overline{\Gamma}_\theta$. Отсюда и из того, что $(\partial\Gamma_\theta)_\eta \subset B$, согласно одному свойству голоморфно выпуклых оболочек (см. например [5, с. 162]) следует, что любая функция, голоморфная в B, продолжается голоморфно на η-окрестность любой поверхности Γ_θ, $\theta \in E$. И так как η не зависит от выбора θ, а множество $\bigcup\limits_{\theta \in E} \Gamma_0$ плотно на B_T^*, то любая функция, голоморфная в B, голоморфно продолжается в точки «грани» B_T^*. Следовательно, на B_T^* нет особых точек функции $F(\zeta, \lambda)$.

С другой стороны, пусть λ^0 = одна из точек λ, для которых $z(\lambda) = z^0$. Напомним, что (ζ^0, z^0) — особая точка функции $f(\zeta, z)$. Так как отображение $z(\lambda)$ локально обратимо, то точка (ζ^0, λ^0) — особая точка функции $F(\zeta, \lambda)$, причем ввиду того, что $\omega(z^0) = Tg(\zeta^0)$, точка (ζ^0, λ^0) принадлежит B_T^*.

Полученное противоречие опровергает предположение о том, что $T < 1$. Следовательно, $T = 1$. Согласно определению числа T равенство $T = 1$ эквивалентно утверждению леммы. Лемма доказана.

Вместе с леммой доказана субгармоничность по ζ функции $-\Lambda_f^*(\zeta w + a)$, и значит, плюрисубгармоничность функции $-\Lambda_f^*(w)$, чем и завершается доказательство теоремы.

Список литературы: 1. *Siciak J.* Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of C^n. — Ann. Polon. Math., 1969, vol. 22, p. 145—171. 2. Bernstein S. Sur l'ordre de la meileare approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne. — Bruxelles. 1912.—270 p. 3. *Ахиезер Н. И., Ронкин Л. И.* О сепаратно аналитических функциях многих переменных и теоремах об острие клина. — Усп. мат. наук., XXVII, вып. 3 (171), 1973, с. 27—42. 4. *Захарюта В. П.* Сепаратно аналитические функции, обобщение теоремы Гартогса и оболочки голоморфности. — Мат. сб. т. 101 (143), № 1 (9), 1976, с. 57—76. 5. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1968. — 420 с.

Поступила 6 октября 1979 г.