УДК 517.5

М. В. НОВИЦКИЙ

ВПОЛНЕ СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТИ $D=(0,1)\times R^m$, $m\geqslant 1$

1. Получим интегральное представление типа Крейна — Мильмана — Шоке для вполне супергармонических функций, т. е. бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $(-\Delta)^n u(z)\geqslant 0$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (**1**) и заданных в области $D=(0, 1)\times R^m$.

Наиболее простыми представителями класса вполне супергармонических функций являются неотрицательные гармонические функции. Согласно общей теории Мартина [1] произвольная неотрицательная гармоническая функция $u(z)$ в области D имеет вид

$$u(z)=\int\limits_{\partial D_M} K(z, w)\, d\mu(w), \tag{2}$$

где $K(z, w)$ — ядро Мартина; μ — мера на границе Мартина ∂D_M. Ф. Т. Браун в работе [2] описал в явном виде границу Мартина ∂D_M для $D=(0, 1)\times R^m$. Он показал, что $\partial D_M=\partial D\cup S$, где

∂D — естественная граница области $D = (0, 1) \times R^m$ в пространстве R^{m+1}, S — единичная сфера в пространстве R^m. Интегральное представление (2) в этом случае имеет вид

$$u(z) = \int\limits_{\partial D} -\frac{\partial G}{\partial n_w}(z, w)\, d\nu(w) + \sin \pi y \int\limits_S \exp(\pi < \alpha, x >)\, d\mu(\alpha), \qquad (3),$$

где $z = (y, x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\langle \alpha, x\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$. Мера ν сосредоточена на ∂D, вообще говоря, неограничена, мера μ сосредоточена на S и конечна, $\frac{\partial}{\partial n_w}$ — производная по внешней нормали в точке $w \in \partial D$; $G(z, w)$ — функция Грина оператора Лапласа с нулевыми условиями на границе ∂D.

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема 1. *Вполне супергармоническая функция в области $D = (0, 1) \times R^m$ представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\partial D} -\frac{\partial G^{k+1}}{\partial n_w}(z, w)\, d\nu_k(w) + \sin \pi y \int\limits_U \exp(\pi\langle \alpha, x\rangle)\, d\rho(\alpha). \qquad (4)$$

Здесь меры ν_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ сосредоточены на ∂D, вообще говоря, неограничены; ρ — конечная мера на единичном шаре U пространства R^m. Последовательность мер $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ и мера ρ определяются по функции $u(z)$ единственным образом.

Обратно, пусть набор мер $\{\nu_k, k = 0, 1, 2, \ldots,\}$ таков, что функция $u(z)$, задаваемая правой частью равенства (4), принадлежит $C^\infty((0, 1) \times R^m)$. Тогда $u(z)$ является вполне супергармонической функцией в области $D = (0, 1) \times R^m$.

Следствие. Семейство всех экстремальных функций в конусе супергармонических функций, заданных в области $D = (0, 1) \times R^m$, есть набор функций: $u_{k,w}(z) = -C\frac{\partial G^{k+1}}{\partial n_w}(z, w)$, $w \in \partial D$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $g_\alpha(z) = C \sin \pi y \exp(\pi\langle\alpha, x\rangle)$, C — произвольная неотрицательная константа $\alpha \in v$.

2. Схема доказательства теоремы 1. В работе [3] установлено общее интегральное представление вполне L-супергармонических функций. Это представление в случае $L = \Delta$ и $D = (0, 1) \times R^m$ выглядит так:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_D G^k(z, w)\, v_k(w)\, dw + \int\limits_0^{\infty} \varphi_t(z)\, d\sigma(t). \qquad (5)$$

Здесь v_k — неотрицательные гармонические функции в области $D (k = 0, 1, 2 \ldots)$, а φ_t, $t > 0$ — неотрицательные собственные функции оператора Лапласа, имеющие при $t > 0$ нулевые гармонические миноранты, σ — конечная мера на $(0, \infty)$. В этом представлении функции v_k и мера σ определяются по функции $u(z)$

единственным образом, а $\varphi_t(z)$ — единственным образом с точностью до множества σ — меры нуль. Функции v_k согласно результату Ф. Т. Брауна допускают представление (3).

3. Вид функций v_k, $k = 0, 1, 2 \ldots$ в разложении (5). Покажем, что при $k \geqslant 1$ их вид можно уточнить. Именно, мера μ_k, отвечающая в представлении (3) неотрицательной гармонической функции $v_k (k \geqslant 1)$, равна нулю.

Лемма 1. *Пусть v_k — неотрицательная гармоническая функция из разложения* (5), *μ_k и ν_k — соответствующие меры из представлений этих функций по форме* (3). *Тогда при $k \geqslant 1$ мера $\mu_k = 0$.*

При доказательстве этой леммы будет использовано следующее утверждение.

Предложение. *Пусть $z^{(1)} = (y^{(1)}, x^{(1)})$, $z^{(2)} = (y^{(2)}, x^{(2)})$ — точки области $D = (0, 1) \times R^m$, $r = \|x^{(1)} - x^{(2)}\|$ и Ω — компакт в области $D = (0, 1) \times R^m$. Тогда, если $z^{(2)} \in \Omega$ и $r \to \infty$, то*

$$\frac{G(z^{(1)}, z^{(2)})}{\sin \pi y^2} = C_m (\sin \pi y^{(1)})\, r^{\frac{1}{2}(m-1)} \exp(-\pi r)(1 + 0(1), \qquad (6)$$

где C_m — константа, зависящая только от размерности пространства R^m.

При $\Omega = \{z^{(2)}\}$ это предложение сформулировано и доказано в [2], однако анализ доказательства показывает, что оно сохраняет силу, если Ω — произвольный компакт в области $(0, 1) \times R^m$.

Доказательство леммы 1. Достаточно показать, что

$$\int\limits_{(0,\ 1)\times R^m} G(z^{(1)}, z^{(2)}) \sin \pi y^{(2)} \exp(\pi \langle \alpha, x^{(2)} \rangle)\, dz^{(2)} \equiv \infty \qquad (7)$$

для $\alpha \in S$ и $z^{(1)} \in D$. Зафиксируем $z^{(1)} \in D = (0, 1) \times R^m$. Рассмотрим последовательность областей $D_n = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \times \Omega_n$, где $\Omega_n \in R^m$ имеет вид $\Omega_n = \{x : x_k = \alpha_i t + \tilde{x}_k;\ t \in [n, \infty),\ 0 \leqslant \tilde{x}_k \leqslant 1,\ k = 0, 1, \ \ldots, m\}$. Воспользуемся для функции Грина асимптотической формулой (6). Тогда при достаточно большом n на множестве D_n справедлива оценка $G(z^{(1)}, z^{(2)}) \sin \pi y^{(2)} \exp(\pi \langle \alpha, x \rangle) \geqslant C_{m,\,n} r^{\frac{1}{2}(m-1)}$, из которой и следует расходимость интеграла (7).

4. Интегральное представление функций φ_λ, $\lambda > 0$.

Теорема 2. *Пусть неотрицательная функция $\varphi_\lambda(z)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_\lambda = -\lambda\varphi_\lambda$, $\lambda > 0$ и ее наилучшая миноранта равна нулю. Тогда функция φ_λ представима в виде*

$$\varphi_\lambda(z) = \sin \pi y \int\limits_{S_\gamma} \exp(\pi \langle \alpha, x \rangle)\, d\mu_\gamma(\alpha), \qquad (8)$$

где $z = (y, x)$, $\pi^2(1 - \gamma^2) = \lambda$, S_γ — сфера радиуса γ, а μ_γ — мера, сосредоточенная на S_γ, определяемая по функции φ_λ единственным образом.

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что для функций φ_λ, можно дать другое эквивалентное определение.

Лемма 2. *Семейство функций φ_λ совпадает с классом неотрицательных локально суммируемых функций в области D, удовлетворяющих уравнению*

$$(P_t\varphi_\lambda)(z) = \int_D p(t, z, w)\,\varphi_\lambda(w)\,dw = e^{-\lambda t}\varphi_\lambda(z), \quad z \in D, \ t > 0, \tag{9}$$

где $p(t, z, w)$ — фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p$ с нулевыми условиями на ∂D.

Доказательство этой леммы использует традиционную технику теории эллиптических уравнений, достаточно элементарно, и поэтому здесь опускается.

Доказательство теоремы 2. Функции φ_λ образуют конус, который будем обозначать через K_λ. Интегральное представление (8) строится следующим образом. Сначала мы показываем, что основание конуса K_λ (иногда еще говорят база конуса K_λ), множество $N_\lambda = \{\varphi_\lambda : \varphi_\lambda \in K_\lambda, \ \ \varphi_\lambda(z_0) = 1\}$ (z_0 — некоторая фиксированная во всех последующих рассуждениях точка из D), можно превратить в выпуклый метризуемый компакт путем введения некоторой метрики. Это гарантирует применимость теоремы Шоке [4, с. 25] о существовании интегрального представления на N_λ через его крайние точки. Единственность представляющей меры, сосредоточенной на крайних точках следует из того факта, что K_λ — структура (см. ниже формулу (13)). Крайние точки N_λ описываются при помощи метода С. А. Молчанова [5].

а) Покажем, что на N_λ может быть введена метрика ρ_{N_λ}, превращающая N_λ в выпуклый метризуемый компакт. Зафиксируем некоторую функцию $\psi_\lambda \not\equiv 0$ из конуса K_λ и рассмотрим оператор

$$Lu = \frac{1}{\psi_\lambda}(\Delta + \lambda I)(\psi_\lambda u) = \Delta u + 2\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial z_i}}{\Psi_\lambda}\frac{\partial u}{\partial z_i}.$$

Пусть $\varphi_\lambda \in N_\lambda$. Тогда неотрицательная функция $u_\lambda = \frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda}$ удовлетворяет уравнению $Lu_\lambda = 0$ и условию нормировки $u_\lambda(z_0) = 1$. Множество неотрицательных решений уравнения $Lu = 0$ с условием $u(z_0) = 1$ обозначим через U. Хорошо известно (см. например [6]), что на U может быть введена метрика ρ_U, превращающая U в выпуклый метризуемый компакт. Эта метрика имеет вид

$$\rho_U(\psi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\frac{\|\psi - \varphi\|_{C(D_n)}}{1 + \|\psi - \varphi\|_{C(D_n)}},$$

где D_n — последовательность областей, компактно вложенных друг в друга и исчерпывающих изнутри область D. Семейство всех функций $u_\lambda = \frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda}$ образует замкнутое подмножество в U. Для проверки этого свойства достаточно заметить, что из сходимости по метрике следует поточечная сходимость (более того, даже равномерная сходимость на каждом компакте в D), а условие $\varphi \in K_\lambda$ нужно проверять, используя второе определение конуса K_λ (лемма 2). Метрика ρ_{N_λ} задается формулой

$$\rho_{N_\lambda}\left(\varphi_\lambda^{(1)}, \varphi_\lambda^{(2)}\right) = \rho_U\left(\frac{\varphi_\lambda^{(1)}}{\psi_\lambda}, \frac{\varphi_\lambda^{(2)}}{\psi_\lambda}\right).$$

в) Найдем экстремальные функции конуса K_λ. Прежде всего отметим, что полугруппа P_t, определяемая равенством $(P_t\varphi)(z) = \int\limits_D p(t, z, w)\,\varphi(w)\,dw$, представима в виде $P_t = P_t^{(1)} \times P_t^{(2)}$, где полугруппы $P_t^{(1)}$ и $P_t^{(2)}$ определяются соответственно равенствами:

$$(P_t^{(1)}g)(y) = \int\limits_0^1 p^{(1)}(t, y, y^{(1)})\,g(y^{(1)})\,dy^{(1)}, \ y \in (0, 1)$$

$$(P_t^{(2)}f)(x) = \int\limits_{R^m} p^{(2)}(t, x, x^{(1)})\,f(x^{(1)})\,dx^{(1)}, \ x \in R^m,$$

в которых $P^{(i)}$, $i = 1, 2$ — фундаментальные решения для параболических уравнений $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ с нулевыми граничными условиями. Известно (см. [7, с. 798]), что

$$p^{(2)}(t, x, x^{(1)}) = \frac{\text{const}}{t^{m/2}} \exp\left(-\frac{\| x - x^{(1)} \|^2}{2t}\right).$$

В теореме 3.1 работы [5] доказано, что если полугруппа P_t представима в виде $P_t^{(1)} \times P_t^{(2)}$ и полугруппы $P_t^{(i)}$, $i = 1, 2$ удовлетворяют некоторому специальному условию (H) (которое мы здесь приводить не будем), то произвольная экстремальная функция допускает разделение переменных. Однако, в нашем случае эта теорема не применима, поскольку условию (H) удовлетворяет только полугруппа $P_t^{(2)}$. Тем не менее, дословно повторяя первую часть доказательства теоремы 3.1, мы убеждаемся в том, что

$$(P_\delta^{(1)} \times P_h^{(2)})\,\varphi_\lambda \leqslant A\varphi_\lambda, \tag{10}$$

где A — некоторая положительная постоянная, а δ и h — достаточно малые неотрицательные числа. Поскольку φ_λ — экстремальная функция, то из (10) получаем, что

$$\left(P_\delta^{(1)} \times P_h^{(2)}\right)\varphi_\lambda = C(\delta, h)\,\varphi_\lambda. \tag{11}$$

При $\delta = h$ $C(\delta, h) = e^{-\lambda h}$. Кроме того, функция $C(\delta, h)$ мультипликативна по переменным δ и h (т. е. $C(\delta_1 + \delta_2, h) = C(\delta_1, h)$

$C(\delta_2, h)$ и аналогично по переменной h). Следовательно, с учетом равенства $C(h, h) = e^{-\lambda h}$, получаем $C(\delta, h) = \exp[\tilde{\gamma}(\delta - h) - \lambda h]$, где $\tilde{\gamma}$ — некоторая постоянная. Равенство (11) может быть переписано в виде

$$\left(P_t^{(1)} \times P_t^{(2)}\right) \varphi_\lambda = \exp[\tilde{\gamma}(t - s) - \lambda t] \varphi_\lambda. \tag{12}$$

Полагая в (12) $s = 0$, получим, что функция $\varphi_\lambda(y, x)$ при фиксированном $x \in R^m$ удовлетворяет уравнению $P_t^{(1)} \varphi_\lambda = \exp[(\lambda - \tilde{\gamma})t] \times \times \varphi_\lambda$. Поскольку фундаментальное решение $P^{(1)}(t, y, y^{(1)})$ имеет нулевые граничные значения, то $\varphi_\lambda(0, x) = \varphi_\lambda(1, x) = 0$. Инфинитезимальный оператор полугруппы $P_t^{(1)}$ равен $\frac{d^2}{dy^2}$, следовательно, для $x \in R^m$ функция $\varphi_\lambda(y, x)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_\lambda(x, y) = (\tilde{\gamma} - \lambda) \varphi_\lambda(x, y), \\ \varphi_\lambda(0, x) = \varphi_\lambda(1, x) = 0. \end{cases}$$

Произвольное решение этой задачи имеет вид $\varphi_\lambda(y, x) = c(x) \times \times \sin \pi y$, где $c(x) \geqslant 0$, а $\tilde{\gamma} - \lambda = -\pi^2$. Из (12) при $t = 0$ следует $P_s^{(2)} \varphi_\lambda(y, x) = \exp(-\tilde{\gamma} s) \varphi_\lambda(y, x)$. Подставляя сюда функцию $\varphi_\lambda(y, x) = c(x) \sin \pi y$, получаем $(P_s^{(2)} c)(x) = \exp(-\tilde{\gamma} s) c(x)$. Следовательно, функция $c(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta c(x) = -\tilde{\gamma} c(x)$ при $x \in R^m$ и является экстремальной функцией в классе неотрицательных функций $v(x)$, удовлетворяющих уравнению $\Delta v(x) = = -\tilde{\gamma} v(x)$. По теореме 3.2 работы [5] получаем $c(x) = c(x_1) \times \times c(x_2) \ \ldots \ c_m(x_m)$, где $c_i(x_i)$ — неотрицательная собственная функция оператора $\frac{d^2}{dx_i^2}$ на прямой R. Следовательно, $c_i(x_i) = = A_i \exp(\beta_i x_i)$, где A_i — некоторые положительные постоянные. Поэтому $\varphi_\lambda(y, x) = C \sin \pi y \exp(\langle \beta, x \rangle)$, $\pi^2 - \|\beta\|^2 = \lambda$. Полагая $\alpha = \frac{\beta}{\pi}$ и $\gamma = \frac{\|\beta\|}{\pi}$, получим, что функции

$$\varphi_\lambda(y, x) = C \sin \pi y \exp(\pi \langle \alpha, x \rangle), \ \alpha \in S_\gamma, \ x \in R^m, \ y \in (0, 1)$$

задают общий вид экстремальных функций конуса K_λ. Применяя теорему Шоке и учитывая вид экстремальных функций φ_λ, получаем (8).

с) Согласно теореме Шоке — Мейе [4, с. 61] единственность представляющей меры μ_γ эквивалентна свойству K_λ быть структурой относительно частичного порядка, задаваемого конусом K_λ: : $\varphi_\lambda^{(1)}$ больше или равно $\varphi_\lambda^{(2)}$, если $\varphi_\lambda^{(1)} - \varphi_\lambda^{(2)}$ принадлежит K_λ. В нашем случае это отношение порядка совпадает с обычным отношением порядка $\varphi_\lambda^{(1)}(z) \geqslant \varphi_\lambda^{(2)}(z)$ для всех $z \in D$. Достаточно показать, что для любых $\varphi_\lambda^{(1)}$, $\varphi_\lambda^{(2)}$ из K_λ существует их наибольшая нижняя грань $\varphi_\lambda^{(1)} \wedge \varphi_\lambda^{(2)}$. Нетрудно проверить, что эта нижняя грань может быть задана формулой

$$\varphi_\lambda^{(1)} \wedge \varphi_\lambda^{(2)} = \lim_{t \to \infty} e^{\lambda t} P_t (\min (\varphi_\lambda^{(1)}, \varphi_\lambda^{(2)})). \tag{13}$$

Итак, нами показано, что

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial D} -\frac{\partial G^{k+1}}{\partial n_w}(z, w)\, d\nu_k(w) + \sin \pi y \int_0^1 \left[\int_{S_\gamma} \exp(\pi\langle\alpha, x\rangle)\, d\mu_\gamma(\alpha) \right] d\sigma(\gamma).$$

Мера ρ строится на единичном шаре U при помощи мер μ_γ, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ и меры σ. Формально меру ρ можно определить формулой

$$\rho(B) = \int_0^1 \mu_\gamma (B \cap S_\gamma)\, d\sigma(\gamma), \tag{14}$$

где B — борелевское множество в шаре U. Однако, доказательство измеримости функции $\mu_\gamma(B \cap S_\gamma)$ по переменной γ затруднительно. Поэтому меру ρ будем строить несколько иначе. Прежде всего заметим, что для дискретной меры σ мера ρ по формуле (14) определена корректно. Далее, функция $\varphi_\lambda(z)$ при фиксированном $z \in D$ не является непрерывной по переменной λ, однако для любого z существует открытое множество $B_z^\varepsilon \subset [0, \pi^2]$ такое, что $\sigma(B_z^\varepsilon) < \varepsilon$ и на $[0, \pi^2] \setminus B_z^\varepsilon$ функция $\varphi_\lambda(z)$ непрерывна. Пусть $\{z_k = (y_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$ плотное счетное множество в D. Определим компакт $F_\varepsilon = [0, \pi^2] \setminus \bigcup_k B_{z_k}^\varepsilon$. На этом компакте функция $\varphi_\lambda(z_k)$ непрерывна для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$, а мера σ слабо аппроксимируется последовательностью дискретных мер σ_n^ε. Тогда

$$v(z_k) = \int_0^{\pi^2} \varphi_\lambda(z_k)\, d\sigma(\lambda) = \int_{F_\varepsilon} \varphi_\lambda(z_k)\, d\sigma_n^\varepsilon(\lambda) + \int_{F_\varepsilon} \varphi_\lambda(z_k)\, d(\sigma - \sigma_n^\varepsilon)(\lambda) + \int_{[0, \pi^2] \setminus F_\varepsilon} \varphi_\lambda(z_k)\, d\sigma(\lambda). \tag{15}$$

Первое слагаемое этой суммы может быть записано в виде $\sin \pi y_k \int_U \exp(\pi\langle\alpha, x\rangle)\, d\mu_n^\varepsilon(\alpha)$. Полагая в (15) $n \to \infty$, получим, что существует на U мера ρ_ε такая, что $v(z_k) = \sin \pi y_k \int_U \exp(\pi\langle\alpha, x_k\rangle)\, d\rho_\varepsilon(\alpha) + \int_{[0, \pi^2] \setminus F_\varepsilon} \varphi_\lambda(z_k)\, d\sigma(\lambda)$. Полагая $\varepsilon \to 0$ и выбирая в случае необходимости подпоследовательность, получим

$$v(z_k) = \sin \pi y_k \int_U \exp(\pi\langle\alpha, x_k\rangle)\, d\rho(\alpha) \tag{16}$$

для некоторой меры ρ на U. В равенстве (16) слева и справа стоят непрерывные по z функции, совпадающие на плотном множестве z_k, $k=0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, они совпадают для всех $z \in D$. Функция $v(z)$ определяется по функции $u(z)$ единственным образом, поэтому в случае неединственности меры ρ получаем $\int\limits_U \exp(\pi\langle\alpha, x\rangle)\, d(\rho_1-\rho_2)(\lambda)=0$, $x \in R^m$, откуда следует, $\rho_1=\rho_2$. Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает благодарность Б. Я. Левину за внимание к работе.

Список литературы: **1.** *Martin R. S.* Minimal positive harmonic functions. — Trans. Amer. Soc., 1941, 49, p. 137—142. **2.** *Brawn F. T.* The Martin boundary of $R^m \times (0,1)$ — I. London Math. Soc., 1972, 5, 59—66. **3.** *Новицкий М. В.* Общее интегральное представление вполне L-супергармонических функций. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 3, с. 538—540. **4.** *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. — М.: Мир, 1968.—110 с. **5.** *Молчанов С. А.* Граница Мартина прямого произведения марковских процессов. — Сиб. мат. журн., 1970, т. 11, № 2, с. 370—380. **6.** *Шур М. Г.* Граница Мартина для линейного эллиптического оператора второго порядка. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, **27**, № 1, с. 45—60. **7.** *Дынкин Е. Д.* Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963.—859 с.

Поступила 27 ноября 1978 г.