УДК 517.522.2

НГУЕН ТХЫОНГ УЕН, НГУЕН КОНГ ТАМ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И НОРМАЛЬНОГО ТИПА. *СООБЩЕНИЕ 1.* Построение присоединенной функции

Теории интерполяции в классе целых функций конечного порядка посвящено много исследований [1—11].

Нас интересует следующая интерполяционная задача.

Пусть заданы последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ в комплексной плоскости и последовательность $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел. При каких условиях любой последовательности $\{a_{nj}\}$, $1 \leqslant j \leqslant q_n$, удовлетворяющей естественному условию $\ln^+ \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant q_n} |a_{nj}| = O(|\lambda_n|^\rho)$, $n \to \infty$, отвечает целая функция $f(z)$ не выше нормального типа при порядке ρ, для которой $f^{(j-1)}(\lambda_n) = a_{nj}$, $1 \leqslant j \leqslant q_n$, $n = 1, 2, \ldots$?

В случае $q_n \equiv 1$ А. Ф. Леонтьев [8, 9], а позднее в других терминах О. С. Фирсакова [10] нашли необходимые и достаточные условия того, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть последовательность узлов интерполяции в классе целых функций конечного порядка и нормального типа. Случай кратных узлов интерполяции исследовали А. В. Братищев и Ю. В. Коробейник [15]. Интерполяционным задачам с простыми и кратными узлами в классе аналитических функций конечного порядка в полуплоскости посвящены работы [12, 13].

Наш метод решения поставленной задачи принципиально отличается от метода А. В. Братищева и Ю. Ф. Коробейника. Он восходит к работам [10, 12] и основан на понятии присоединенной функции.

Дадим некоторые определения.

Определение 1. *Обозначим через* $[\rho, \infty)$ *класс всех целых функций, растущих не быстрее нормального типа при порядке* ρ.

В решении интерполяционной задачи в классе $[\rho, \infty)$ *важную роль играет понятие присоединенной функции.*

Определение 2. *Будем называть функцию* $f(z)$ *класса* $[\rho, \infty]$ *присоединенной функцией для пары последовательностей* $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $Q = \{q_n\}$, *где* λ_n — *комплексные,* q_n — *натуральные числа, если функция* $f(z)$ *имеет в точках* $\lambda_n \in \Lambda$ корни с кратностью $q_n \in Q$, и, кроме того, множество $\Xi = \{\mu_n\}$ остальных корней удовлетворяет условиям: 1) $d(\Xi, \lambda_n) > \delta |\lambda_n|^{1-\rho}$ $(\delta > 0)$;

2. $|\mu_{n+1}| - |\mu_n| > \alpha |\mu_n|^{1-\rho}$ $(\alpha > 0)$*;

---

* Из условия 2 следует, что $n(t, \Xi) = O(t^\rho)$, $t \to \infty$.

3. Точки μ_n лежат на конечном наборе лучей, исходящих из начала координат;

4. При целом ρ

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant r}\frac{q_n}{\lambda_n^\rho}+\sum_{|\mu_n|\leqslant r}\frac{1}{\mu_n^\rho}=O(1)\quad(r\to\infty).$$

Определение 3. *Будем говорить, что пара последовательностей $\Lambda=\{\lambda_n\}$, $Q=\{q_n\}$ имеет конечную плотность при порядке ρ, если последовательность $\Lambda_Q=\{\lambda_n\}$, где каждый член λ_n повторяется q_n раз, имеет конечную плотность при порядке ρ,* т. е. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{n(t,\Lambda_Q)}{t^\rho}<\infty$, *где $n(t,\Lambda_Q)$ — число точек λ_n с учетом кратностей в круге $|z|<t$.*

Теорема. *Для всякой пары последовательностей $\Lambda=\{\lambda_n\}$ и $Q=\{q_n\}$, имеющей конечную плотность при порядке $\rho>0$, существует присоединенная функция.*

Частный случай этой теоремы, когда $q_n\equiv 1$, был получен ранее О. С. Фирсаковой, однако, своего доказательства она не опубликовала. Доказательство, приводимое нами, не зависит от того, простыми или кратными узлами интерполяции являются точки λ_n.

Доказательство. Отметим, что утверждение теоремы тривиально, если ρ нецелое или ρ целое и последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}$ удовлетворяет соотношению $\sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant r}\dfrac{1}{\lambda_n^\rho}=O(1)$. В этих случаях за присоединенную функцию последовательности $\Lambda=\{\lambda_n\}$ можно принять каноническое произведение Вейерштрасса $E(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}G\left(\dfrac{z}{\lambda_n},\,p\right)$, где $p=[\rho]$.

Нам остается рассмотреть случай, когда последовательность Λ имеет конечную плотность при целом порядке и удовлетворяет соотношению

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left|\sum_{|\lambda_n|<r}\frac{1}{\lambda_n^\rho}\right|=\infty.$$

Так как $n(t,\Lambda)=O(t^\rho)$, то существует положительная постоянная C такая, что

$$n(t,\Lambda)<Ct^\rho. \tag{1}$$

Положим $I_\delta(\lambda_n)=\{r>0:|r-r_n|\leqslant\delta r_n^{1-\rho},\ r_n=|\lambda_n|\}$; $E_\delta=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_\delta\times(\lambda_n)$. Назовем $I_\delta(\lambda_n)$ исключительными интервалами. Оценим относительную плотность E_δ; $\operatorname{mes}(E_\delta\cap[0,r])\leqslant\delta\sum\limits_{r_n\leqslant r+\delta}r_n^{1-\rho}=$

$$= \delta \int_0^{r+\delta} t^{1-\rho} dn(t) = \delta (r+\delta)^{1-\rho} n(r+\delta, \Lambda) + \delta(\rho-1) \int_0^{r+\delta} t^{-\rho} n(t)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \delta C(r+\delta) + \delta(\rho-1) C(r+\delta) = \delta C\rho(r+\delta) < 2C\rho r\delta\ (\delta < r).$$ Итак, имеет место оценка
$$(1/r) \operatorname{mes}(E_\delta \cap [0, r]) \leqslant 2C\rho\delta. \tag{2}$$

Обозначим через $T_n = q^n$, $n = 1, 2, \ldots$, где q — некоторое натуральное, $q > 1$; $E_\delta^n = E_\delta \cap [T_n, T_{n+1}]$. Из (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех n справедливы оценки
$$\operatorname{mes} E_\delta^n \leqslant \varepsilon (T_{n+1} - T_n). \tag{3}$$

Каждый интервал $[T_n, T_{n+1}]$ разобьем на подынтервалы одинаковой длины $\beta T_{n+1}^{1-\rho}$, где β определяется следующим образом:
$$\beta = \frac{q-1}{16q} \{[C(\rho, q)] + 1\}^{-1};\ C(\rho, q) = \rho C \ln(eq^\rho).$$

Здесь постоянная C фигурирует в (1), $[x]$ — целая часть числа x.

Введем две последовательности натуральных чисел $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ следующим образом:
$$K_n = \frac{T_{n+1} - T_n}{\beta T_{n+1}^{1-\rho}};\ k_n = \frac{T_{n+1} - T_n}{2\beta T_{n+1}^{1-\rho}} + 2.$$

Покажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ среди K_n подынтервалов имеется, по крайней мере, k_n содержащих точки из дополнения E_δ. Действительно, предположим обратное: имеется $K_n - k_n + 1$ подынтервалов, содержащих только точки из множества E_δ. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_{K_n - k_n + 1}$ эти подынтервалы. В силу (3) имеем
$$\operatorname{mes}\Big(E_\delta \cap \bigcup_{i=1}^{K_n - k_n + 1} e_i\Big) \leqslant \operatorname{mes} E_\delta^n \leqslant \varepsilon (T_{n+1} - T_n). \tag{4}$$

С другой стороны,
$$\operatorname{mes}\Big(E_\delta \cap \bigcup_{i=1}^{K_n - k_n + 1} e_i\Big) = (K_n - k_n + 1)\, \beta T_{n+1}^{1-\rho} =$$
$$= \left(\frac{T_{n+1} - T_n}{\beta T_{n+1}^{1-\rho}} - \frac{T_{n+1} - T_n}{2\beta T_{n+1}^{1-\rho}} - 1\right) \beta T_{n+1}^{1-\rho} = (T_{n+1} - T_n) -$$
$$- \frac{1}{2}(T_{n+1} - T_n) - \beta T_{n+1}^{1-\rho} = \frac{1}{2}(T_{n+1} - T_n)\left(1 - \frac{2\beta T_{n+1}^{1-\rho}}{T_{n+1} - T_n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(T_{n+1} - T_n)(1 + o(1)), \tag{5}$$

(4) и (5) противоречат друг другу, так как ε можно выбрать достаточно малым. Итак, имеется $k_n = \dfrac{T_{n+1} - T_n}{2\beta T_{n+1}^{1-\rho}} + 2$ подынтервалов, содержащих точки из дополнения E_δ. Из этих подынтервалов

отбросим начальный и конечный и из остальных выберем $N_n = \frac{T_{n+1} - T_n}{4\beta T_{n+1}^{1-\rho}}$ таких подынтервалов, чтобы никакие два из них не были соседними. На каждом подынтервале этого семейства выделим одну точку $\eta_{k,\, n}$, $1 \leqslant k \leqslant N_n$, из дополнения к объединению E_δ исключительных интервалов.

Обозначим через

$$\{\eta_k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\eta_{j,\, k}\}_{j=1}^{N_n}.$$

Покажем, что для всех k справедливы неравенства

$$\eta_{k+1} - \eta_k > \alpha \eta_k^{1-\rho}, \tag{6}$$

где $\alpha = \beta q^{1-\rho}$. Действительно, если η_k и η_{k+1} принадлежат одному и тому же интервалу $[T_n,\ T_{n+1}]$, то $\eta_{k+1} - \eta_k > \beta T_{n+1}^{1-\rho} > \alpha T_{n+1}^{1-\rho} > \alpha \eta_k^{1-\rho}$. Если $\eta_k \in [T_n,\ T_{n+1}]$, $\eta_{k+1} \in [T_{n+1},\ T_{n+2}]$, то $\eta_{k+1} - \eta_k > (T_{n+1} + \beta T_{n+2}^{1-\rho}) - (T_{n+1} - \beta T_{n+1}^{1-\rho}) = \beta (T_{n+1}^{1-\rho} + T_{n+2}^{1-\rho}) > \alpha T_n^{1-\rho} > \alpha \eta_k^{1-\rho}$. Тем самым соотношение (6) доказано.

Оценив сумму $\sum\limits_{T_n < \eta_k < T_{n+1}} \eta_k^{-\rho}$, имеем $\sum\limits_{T_n < \eta_k < T_{n+1}} \eta_k^{-\rho} > N_n T_{n+1}^{-\rho} > \frac{T_{n+1} - T_n}{4\beta T_{n+1}} = \frac{q-1}{4q} \cdot \frac{1}{\beta} = 4\{[C(\rho,\ q)] + 1\}$. Итак,

$$\sum_{T_n < \eta_k < T_{n+1}} \eta_k^{-\rho} > 4\{[C(\rho,\ q)] + 1\}. \tag{7}$$

Теперь можем приступить к построению последовательности, удовлетворяющей условиям 1)—4) определения 2. Пусть уже построены точки μ_k такие, что $|\mu_k| \leqslant T_n$ и $\Big|\sum\limits_{|\lambda_k| < T_n} \lambda_k^{-\rho} + \sum\limits_{|\mu_k| < T_n} \mu_k^{-\rho}\Big| \leqslant 2T_{n-1}^{-\rho}$. Покажем, как построить следующие $\mu_k : |\mu_k| \in (T_n,\ T_{n+1}]$. Положим $h_n = \sum\limits_{|\lambda_k| < T_{n+1}} \lambda_k^{-\rho} + \sum\limits_{|\mu_k| < T_n} \mu_k^{-\rho}$. Пусть для определенности

$$\operatorname{Re} h_n > 0, \quad \operatorname{Im} h_n < 0. \tag{8}$$

Имеем $\sum\limits_{T_n < |\lambda_k| < T_{n+1}} |\lambda_k|^{-\rho} \leqslant \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} t^{-\rho} dn(t) \leqslant T_{n+1}^{-\rho} n(T_{n+1}) + \rho \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \times$ $\times\, t^{-\rho-1} n(t)\, dt < C + \rho C \ln \frac{T_{n+1}}{T_n} = C \ln (eq^\rho) = C(\rho,\ q)$. Значит,

$$\Big|\operatorname{Re} \sum_{T_n < |\lambda_k| < T_{n+1}} \lambda_k^{-\rho}\Big| < C(\rho,\ q); \quad \Big|\operatorname{Im} \sum_{T_n < |\lambda_k| < T_{n+1}} \lambda_k^{-\rho}\Big| < C(\rho,\ q). \tag{9}$$

Выберем точки $\zeta_j = \eta_{j,\, n} e^{i\theta_j}$; $1 \leqslant j \leqslant N_n$ так, чтобы выполнялись оценки $\operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} < 0$ и $\operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} > 0$. Для этого возьмем, например,

$$\theta_j = \frac{5\pi}{4\rho}. \tag{10}$$

В силу соотношений (7)—(10) мы получаем, что справедливо одно из следующих утверждений.

А) Найдется такое число $l_n \leqslant N_n$, что $\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} \geqslant 0$, $\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} < 0$; $\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} \leqslant 0$, $\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} > 0$.

Б) Найдется такое число $l_n \leqslant N_n$, что $\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} > 0$, но $\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} < 0$; $\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} \leqslant 0$.

В) Существует такое число $l_n \leqslant N_n$, что $\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} < 0$, но $\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} \geqslant 0$; $\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} > 0$, если имеет место случай А), то положим $\{\mu_k : |\mu_k| \in (T_n, T_{n+1}]\} = \{\zeta_j : 1 \leqslant j \leqslant l_n\}$. Случаи Б) и В) похожи друг на друга. Для определенности предположим, что реализуется случай Б). Рассмотрим точки $\zeta_j' = \eta_{j,n} e^{i\theta_j'}$, $\theta_j' = -\frac{\pi}{2\rho}$. Ясно, что $\operatorname{Re} \zeta_j'^\rho = 0$, $\operatorname{Im} \zeta_j'^\rho < 0$. Поэтому найдется такое число $m_n \leqslant N_n$, что

$$\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} + \sum_{j=1}^{m_n+1} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta'^\rho_j} > 0;$$

$$\operatorname{Re} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta_j^\rho} + \sum_{j=1}^{m_n+1} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta'^\rho_j} \leqslant 0;$$

$$\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} + \sum_{j=1}^{m_n} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta'^\rho_j} < 0;$$

$$\operatorname{Im} h_n + \sum_{j=1}^{l_n+1} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta_j^\rho} + \sum_{j=1}^{m_n+1} \operatorname{Im} \frac{1}{\zeta'^\rho_j} \geqslant 0.$$

Положим $\{\mu_k : |\mu_k| \in (T_n, T_{n+1}]\} = \{\zeta_j : 1 \leqslant j \leqslant l_n\} \cup \{\zeta_i' : 1 \leqslant i \leqslant m_n\}$.

Имеем

$$\Big|\sum_{|\lambda_k|\leqslant T_{n+1}}\lambda_k^{-\rho}+\sum_{|\mu_k|\leqslant T_{n+1}}\mu_k^{-\rho}\Big|=\Big|h_n+\sum_{T_n<|\mu_k|\leqslant T_{n+1}}\mu_k^{-\rho}\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\operatorname{Re}h_n+\sum_{T_n<|\mu_k|\leqslant T_{n+1}}\operatorname{Re}\mu_k^{-\rho}\Big|+\Big|\operatorname{Im}h_n+\sum_{T_n<|\mu_k|\leqslant T_{n+1}}\operatorname{Im}\mu_k^{-\rho}\Big|<2T_n^{-\rho}. \tag{11}$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, получаем последовательность $\Xi=\{\mu_k\}$.

Проверим, что для последовательности Ξ выполняются условия 1)—4). Из построения видно, что условия 1)—3) выполнены. Покажем, что выполнено и последнее условие. Для любого r найдется натуральное число n такое, что $r\in(T_n,\ T_{n+1}]$. Тогда в силу (11) получим

$$\Big|\sum_{|\lambda_k|\leqslant r}\frac{1}{\lambda_k^\rho}+\sum_{|\mu_k|\leqslant r}\frac{1}{\mu_k^\rho}\Big|\leqslant\Big|\sum_{|\lambda_k|\leqslant T_n}\frac{1}{\lambda_k^\rho}+\sum_{|\mu_k|\leqslant T_n}\frac{1}{\mu_k^\rho}\Big|+$$
$$+\Big|\sum_{T_n<|\lambda_k|\leqslant r}\frac{1}{\lambda_k^\rho}\Big|+\Big|\sum_{T_n<|\mu_k|\leqslant r}\frac{1}{\mu_k^\rho}\Big|\leqslant o(1)+\sum_{T_n<|\lambda_k|\leqslant r}\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}+$$
$$+\sum_{T_n<|\mu_k|\leqslant r}\frac{1}{|\mu_k|^\rho}\leqslant o(1)+\sum_{T_n<|\lambda_k|\leqslant T_{n+1}}\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}+\sum_{T_n<|\mu_k|\leqslant T_{n+1}}\frac{1}{|\mu_k|^\rho}. \tag{12}$$

Два последних слагаемых в (12) оцениваются таким образом:

$$\sum_{T_n<|\lambda_k|\leqslant T_{n+1}}\frac{1}{|\lambda_k|^\rho}=\int_{T_n}^{T_{n+1}}t^{-\rho}dn(t,\ \Lambda)\leqslant T_{n+1}^{-\rho}n(T_{n+1},\ \Lambda)+$$
$$+\rho\int_{T_n}^{T_{n+1}}t^{-\rho-1}n(t,\ \Lambda)\,dt\leqslant C+\rho C\int_{T_n}^{T_{n+1}}t^{-1}dt=C(1+\rho\ln q)=$$
$$=C\ln eq^\rho\leqslant C(\rho,\ q); \tag{13}$$
$$\sum_{T_n<|\mu_k|^\rho\leqslant T_{n+1}}\frac{1}{|\mu_k|}\leqslant C_1(\rho,\ q), \tag{14}$$

где $C_1(\rho,\ q)=C_1\ln eq^\rho$, а величина $C_1<\infty$ такова, что $n(t,\ \Xi)\leqslant\leqslant C_1\cdot t^\rho$. Из оценок (12)—(14) следует, что последовательность Ξ удовлетворяет условию 4). Теорема доказана.

В заключение авторы выражают глубокую признательность доктору технических наук Нгуен Тхук Лоану, чьей поддержкой они пользовались при выполнении этой работы.

Список литературы: **1.** *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1967.—375 с. **2.** *Гельфонд А. О.* Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка. — Усп. мат. наук, 1937, № 3, с. 144—174. **3.** *Гончаров В. Л.* Интерполяционные процессы и целые функции. — Усп. мат. наук, 1937, № 3, с. 113—143. **4.** *Евграфов М. А.* Интерполяционная задача Абеля-Гончарова. — М.: Гостехиздат, 1954.—127 с. **5.** *Левин Б. Я.* О некоторых приложениях интерполяционного ряда Лагранжа в теории целых функций. — Мат, сб., 1940, т. 50, № 8, с. 48—56. **6.** *Леонтьев А. Ф.* Об интерполяции в классе целых функций конечного порядка. — Докл. АН СССР, 1948, с. 785—787. **7.** *Леонтьев А. Ф.* Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа. — Докл. АН СССР, 1949, т. 66. с. 153—156. **8.** *Леонтьев А. Ф.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения. — Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, № 39, с. 20—25. **9.** *Леонтьев А. Ф.* К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. — Мат. сб., 1957, т. 44, № 83, с. 81—96. **10.** *Фирсаков О. С.* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций. — Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 3, с. 477—480. **11.** *Левин Б. Я.*, *Островский И. В.* Специальные вопросы теории целых функций. История отечественной математики. — Киев: Наук. думка, 1970, т. 4, кн. 1, с. 49—71. **12.** *Левин Б. Я.*, *Нгуен Тхыонг Уен.* Об интерполяционной задаче в классе аналитических функций конечного порядка. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1975, вып. 22, с. 77—86. **13.** *Нгуен Тхыонг Уен.* Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1975, вып. 24, с. 102—124. **14.** *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.—632 с. **15.** *Братищев А. В.*, *Коробейник Ю. Ф.* Краткая интерполяционная задача в пространствах целых функций заданного уточненного порядка. — Изв. АН СССР, 40: 5 1976, с. 1102—1127.

Поступила 10 декабря 1978 г.