УДК 517.53

Н. И. НАГНИБИДА

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть H — некоторое полное счетно-нормированное пространство функций, аналитических в точке $z=0$, с возрастающими (по s) нормами $\|\cdot\|_s$ $(s=1, 2, \ldots)$, причем если $f \in H$ и $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, то $\forall s$ $\|f\|_s=\sum\limits_{k=0}^{\infty}|f_k|\cdot\|z^k\|_s$. Будем предполагать также, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\|z^i\|_{s_1}/\|z^i\|_{s_2}<+\infty \ (\forall s_1, s_2 : s_1<s_2), \tag{1}$$

и введем, далее, в рассмотрение операторы J и Δ, действующие в пространстве H соответственно по закону

$$(If)(z)=\int_0^z f(\zeta)\,d\zeta \text{ и } (\Delta f)(z)=\frac{f(z)-f(0)}{z}\ (\forall f\in H).$$

Наша цель — дать описание всех подпространств пространства H, инвариантных соответственно относительно операторов I и Δ. Для этого, однако, нам потребуются некоторые вспомогательные факты, имеющие на наш взгляд и определенный самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Система $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства H.*

Учитывая это очевидное утверждение, есть смысл поставить вопрос об описании линейных непрерывных отображений пространства H в себя в матричной форме (т. е. в такой форме, в какой обычно описываются операторы в пространствах всех аналитических в круговых областях функций с топологией компактной сходимости).

Лемма 2. *Пусть оператор T определен на элементах степенного базиса соотношениями $Tz^n=\sum_{i=0}^{\infty} t_{i,n}z^i$, $n=0, 1, \ldots,$ и $Tz^n\in H$. Для того чтобы его можно было продолжить до линейного непрерывного отображения всего пространства H в H, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух равносильных условий: 1) $\forall s_1\ \exists s_2$: $\sup\limits_n \sum_{i=0}^{\infty}|t_{i,n}|\,\|z^i\|_{s_1}/\|z^n\|_{s_2}<+\infty$; 2) $\forall s_1^0 \exists s_2^0$ и $\exists C_0=\text{const}$: $|t_{i,n}|\leqslant C_0\|z^n\|_{s_2^0}/\|z^i\|_{s_1^0}(\forall i,\ n)$.*

В частности, верна также

Лемма 3. *Пусть функционал l определен на элементах степенного базиса $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ и $l(z^n)=l_n(n=0, 1, \ldots)$. Для того чтобы его можно было расширить до линейного непрерывного функционала на H, необходимо и достаточно, чтобы $\exists s$ и $\exists C$, что $|l_n|\leqslant$ $\leqslant C\|z^n\|_s(n=0, 1, \ldots)$. При этом $l(f)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n l_n(\forall f\in H)$.*

1. Займемся теперь нахождением всех линейных непрерывных операторов в пространстве H, коммутирующих с Δ.

Вначале заметим (см., например, [2]), что T является линейным непрерывным отображением H в себя, перестановочным с Δ, тогда и только тогда, когда его матрица $[t_{i,n}]_{i,n=0}^{\infty}$ в степенном базисе имеет вид

$$t_{i,n}=\begin{cases} 0, & i>n,\\ t_{0,n-i}, & i\leqslant n,\end{cases}$$

и выполняется условие

$$\forall s_1 \exists s_2 \text{ и } \exists C=\text{const}: |t_{0,n-i}|\leqslant C\|z^n\|_{s_2}/\|z^i\|_{s_1}\ (n\geqslant i). \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем в этом пункте будем предполагать еще, что $\forall (s_1, s_2)\ \exists s_3$:

$$\| z^{n+k} \|_{s_3} \geqslant \| z^n \|_{s_2} \cdot \| z^k \|_{s_1} (\forall n,\ k \geqslant 0). \tag{3}$$

Тогда верна

Лемма 4. *Условие (2) равносильно тому, что $\exists s$ и $\exists C_0$:*

$$| t_{0,\ n} | \leqslant C_0 \| z^n \|_s (\forall n \geqslant 0). \tag{4}$$

Справедлива также (см. [2])

Теорема 1. *Для того чтобы T был линейным непрерывным оператором в H, коммутирующим с Δ, необходимо и достаточно, чтобы $T = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_k \Delta^k$ и последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяла условию (4).*

С помощью этого утверждения доказывается

Теорема 2. *Для того чтобы T был изоморфизмом пространства H, перестановочным с Δ, необходимо, а при выполнении условия: $\forall C_0$ и $\forall s\ \exists s_0$:*

$$C_0 \sum_{i=1}^{k} \| z^{k-i} \|_{s_0} \| z^i \|_s / \| z^k \|_{s_0} < 1\ (k \geqslant k_0 \geqslant 1) \tag{5}$$

и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям теоремы 1 и $t_0 \neq 0$.

В доказательстве нуждается, очевидно, только достаточность условий этой теоремы. Для этого, считая $t_0 = 1$, мы покажем, что решение системы уравнений $\sum\limits_{i=0}^{k} x_{k-1} t_i = \delta_{k,\ 0} (k \geqslant 0)$ также удовлетворяет условию (4) (в этом случае обратный к T оператор T^{-1} будет определяться формулой $T^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k \Delta^k$).

Действительно, возьмем величины C_0 и s из условия (4). Пусть, далее, s_0 таково, что при $k \geqslant k_0 \geqslant 1$ выполняется условие (5), а постоянная C выбрана так, что $|x_k| \leqslant C \| z^k \|_{s_0} (\forall k \leqslant k_0 - 1)$. Тогда, исходя из равенства $x_{k_0} = -\sum\limits_{i=1}^{k_0} t_i x_{k_0 - i}$, получим $|x_{k_0}| \leqslant C_0 \sum\limits_{i=1}^{k_0} \times$

$$\times \| z^i \|_s \cdot | x_{k_0 - i} | \leqslant C \cdot C_0 \sum_{i=1}^{k_0} \| z^{k_0 - i} \|_{s_0} \cdot \| z^i \|_s \leqslant C \| z^{k_0} \|_{s_0}.$$

Следовательно, оценки вида (4) справедливы и при $k = k_0$. На основании метода математической индукции мы убеждаемся в том, что они верны также при любом натуральном k. Теорема доказана полностью.

Лемма 5. *Система $\{(\Delta^n f)(z)\}_{n=0}^{\infty}$, где $f \in H$, полна в H, для которого выполняется условие (5), тогда и только тогда, когда*

f не удовлетворяет ни одному уравнению вида $(Tf)(z) \equiv 0$, где T — отличный от нулевого линейный непрерывный в H оператор, коммутирующий с Δ.

Это утверждение получается непосредственным применением критерия полноты (H является, очевидно, пространством Фреше!), теоремы 1 и леммы 3.

Лемма 6. *Пусть пространство H удовлетворяет условию (5). Если T — отличный от нулевого линейный непрерывный в H оператор, коммутирующий с Δ, $f \in H$ и $(Tf)(z) \equiv 0$, то f — многочлен.*

Дейсвительно, если $T = \sum_{k=0}^{\infty} t_k \Delta^k$ и число m таково, что $t_0 = t_1 = \cdots = t_{m-1} = 0$, а $t_m \neq 0$, то $T = T_1 \cdot \Delta^m$, где T_1 — изоморфизм (на основании теоремы 2) пространства H. Уравнению же $\Delta^m f = 0$ удовлетворяют в H лишь многочлены степени не выше $m - 1$.

Поэтому справедлива

Теорема 3. *Система $\{(\Delta^n f)(z)\}_{n=0}^{\infty}$, где $f \in H$ и H удовлетворяет условию (5), полна в H в том и только том случае, когда f отлична от многочлена.*

Поскольку, таким образом, каждое нетривиальное подпространство пространства H, инвариантное относительно оператора Δ, не может содержать трансцендентных функций, то мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть H удовлетворяет условию (5). Для того чтобы множество M было нетривиальным подпространством пространства H, инвариантным относительно оператора Δ, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с замкнутой линейной оболочкой системы $\{z^k\}_{k=0}^{m}$ при некотором целом неотрицательном m.*

Следовательно, оператор Δ является одноклеточным в пространстве H.

Замечание 1. Можно проверить, что примерами рассматриваемого пространства H являются, в частности, следующие пространства: A_∞ — всех целых функций $\left(\|f\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| s^k\right)$, $\mathscr{E}_\rho = [\rho, \infty]$ — — всех целых функций порядка не выше $\rho \left(\|f\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \times \right.$ $\left. \times \left(\frac{k}{\rho + s^{-1}}\right)^{\frac{k}{\rho+s^{-1}}} e^{-\frac{k}{\rho+s^{-1}}}\right)$ и $H_\rho = [\rho, 0]$ — всех целых функций не выше порядка ρ и минимального типа $\left(\|f\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| k^{\frac{k}{\rho}} s^k\right)$. В то же время для пространства $A_R \left(\|f\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \left(R - \frac{1}{s}\right)^k\right)$ всех функций, аналитических в круге $|z|<R$, $0<R<\infty$, условие (5) не выполняется.

Замечание 2. Теорему 3 любопытно сравнить с известным [3] утверждением о том, что в пространстве A_R, $0<R<\infty$, система $\{(\Delta^n f)(z)\}_{n=0}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда f отлична от рациональной.

2. Пусть, наконец, пространство H удовлетворяет условию (1) и условию (вместо (3) и (5)) $\forall s_0\ \exists s$ и $\exists C$:

$$\|z^{k+i}\|_{s_0} \leqslant C\|z^k\|_s \cdot \|z^i\|_s \ (\forall k,\ i \geqslant 0). \tag{6}$$

Как и раньше (см. также [4]), могут быть доказаны следующие утверждения.

Теорема 5. *Для того чтобы T был линейным непрерывным в H оператором, коммутирующим с J, необходимо и достаточно, чтобы $T=\sum_{k=0}^{\infty} k!b_kJ^k$ и выполнялось одно из равносильных условий: а) $\overline{\lim}|b_k|\|z^k\|_s<+\infty$ $(\forall s)$; б) функция $\sum_{k=0}^{\infty} b_k\lambda^k$ принадлежит пространству H.*

Замечание 3. Условия а) и б) выполняются автоматически, так как $\sum_{k=0}^{\infty} b_kz^k=T1$.

Теорема 6. *Для того чтобы T был изоморфизмом пространства H, перестановочным с J, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям теоремы 5 и $b_0\neq 0$.*

Как и в [4], описываются также пространства, инвариантные относительно оператора J в H.

Теорема 7. *Система* $\{(J^nf)(z)\}_{n=0}^{\infty}$, где $f\in H$, *является полной (базисом) в пространстве H тогда и только тогда, когда $f(0)\neq 0$.*

Теорема 8. *Линейное замкнутое множество M является инвариантным относительно J подпространством пространства H в том и только том случае, когда оно совпадает с замкнутой линейной оболочкой системы $\{z^k\}_{k=m}^{\infty}$ при некотором фиксированном натуральном m.*

Замечание 4. Условию (6) удовлетворяет, кроме A_∞, $\mathcal{E}_\rho$ и $H_{\rho\gamma}$ уже и пространство A_R с $0<R<\infty$.

Список литературы: 1. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций. — Мат. анализ (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР), 1974, т. 12, с. 199—412. 2. *Нагнибида Н. И.* О линейных непрерывных операторах в аналитическом пространстве, перестановочных с оператором дифференцирования.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1966, вып. 2, с. 160—164. 3. *Казьмин Ю. А.* О последовательных остатках ряда Тейлора.—Вестн. Моск. ун-та. Мат. мех., 1963, № 5, с. 35—46. 4. *Нагнибида Н. И.* О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. — Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 6, с. 1306—1318.

Поступила 7 сентября 1977 г.