УДК 517.923

А. З. МОХОНЬКО

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА КЛУНИ И ХЕЙМАНА К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть дано неприводимое дифференциальное уравнение (д. у.)

$$P_0 w'^m + \cdots + P_{m-1} w' + P_m = 0, \tag{1}$$

$P_i = \sum\limits_{k=0}^{\varkappa_i} a_{ik}(z) w^k$, $0 \leqslant i \leqslant m$, где $a_{ik}(z) = c_{\alpha_{ik}} z^{\alpha_{ik}}(1 + o(1))$, $|z| \to \to \infty$ — рациональная функция, $0 \leqslant k \leqslant \varkappa_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим

$$p = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\frac{1}{i} \max_{0 \leqslant k \leqslant \varkappa_i} \alpha_{ik} \right). \tag{2}$$

Пусть $w(z)$ — мероморфное в конечной плоскости решение (1). Если $P_0(z, w)$ зависит от w, то $w(z)$ — рациональная функция [1]. Если $P_0(z, w)$ не зависит от w, то, не уменьшая общности, можно считать $P_0 \equiv 1$. Мы будем без пояснений использовать стандартные обозначения теории мероморфных функций (см. [2]). Буквой C будем обозначать различные константы. Известно [3], что $(r > r_0)$

$$T(r, w) \leqslant \begin{cases} C \ln r, & p < -1, \\ C \ln^2 r, & p = -1, \\ C r^{2p+2}, & p > -1, \end{cases} \tag{3}$$

причем для мероморфных решений оценка (3) достигается. В то же время метод Вимана — Валирона [4], который применим только к целым решениям уравнения (1), позволяет для таких решений получить более точный результат

$$T(r, w) \leqslant \begin{cases} C \ln r, & p \leqslant -1, \\ C r^{p+1}, & p > -1. \end{cases} \tag{4}$$

Эта оценка также до‑тигается.

Применение одного результата Клуни и Хеймана [5] к целым решениям (1) позволяет единым методом оценивать рост целых и мероморфных решений д. у. (1), причем для целых решений получить оценку (4).

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция. Положим $\mu(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$. В [5] доказана теорема: если $f(z)$ — целая функция, такая, что $\mu(r, f) < C r^{\sigma}$, $r \geqslant r_0$, $-1 < \sigma < \infty$, то $\log M(r, f) < C r^{\sigma+1}$.

Выберем натуральное число $K \geqslant (\max \varkappa_i / i) - 2$; $1 \leqslant i \leqslant m$. Преобразуем д. у. (1) следующим образом:

$$w'^m w^{mK} + \cdots + P_i w'^{m-i} w^{mK} + \cdots + P_m w^{mK} = 0,$$

$$[(w^{K+1})']^m + \cdots + \overline{P}_i [(w^{K+1})']^{m-i} + \cdots + \overline{P}_m = 0, \tag{5}$$

где $\overline{P}_i = (K+1)^i P_i w^{iK}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Из (5) следует $|(w^{K+1})'|^m \leqslant \leqslant (m+1) \max |(w^{K+1})'|^{m-i}|\overline{P}_i|$, или

$$|(w^{K+1})'| \leqslant C \max |P_i|^{1/i} |w|^K. \qquad (6)$$

Пусть $|x|^1 = \max(1, |x|)$; $|z| = r$. Из (6) и (2) получаем

$$\mu(r, w^{K+1}) < C \max |P_i|^{1/i} |w^K| (1 + |w|^{2K+2})^{-1} <$$

$$< C \max \left(\sum_{k=0}^{\varkappa_i} |a_{ik}| \right)^{1/i} (|w|^{\Lambda})^{\varkappa_i/i} |w|^K (1 + |w|^{2K+2})^{-1} < Cr^p. \qquad (7)$$

Если $w(z)$ — мероморфное решение (1), то из (7), соотношения $T(r, w^{K+1}) = (K+1) T(r, w)$ и формулы Симидзу — Альфорса [2] следует (3). Пусть $w(z)$ — целое решение (1). Если $p \leqslant -1$, то из (3) следует, что $w(z)$ имеет нулевой порядок, а д. у. (1) не могут удовлетворять целые трансцендентные функции нулевого порядка ([4, с. 224]). Поэтому при $p \leqslant -1$ имеем $T(r, w) = O(\ln r)$. Если $p > -1$, то из [5] следует, что $\log M(r, w) < Cr^{p+1}$, т. е. $T(r, w) < Cr^{p+1}$. Для целых решений уравнения (1) получили соотношение (4).

Автор благодарит А. А. Гольдберга за руководство работой.

Список литературы: 1. *Malmquist J.* Sur les fonctions a un nombre fini de branches satisfaisant à une equation differentielle du premier ordre.— Acta math., 1920, vol. 42, p. 317—325. 2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с. 3. *Гольдберг А. А.* Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка.— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, с. 254—261. 4. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1957.— 240 с. 5. *Clunie J., Hayman W. K.* The spherical derivative of integral and meromorphic functions.— Commentarii mathematici Helvetici, 1966, vol. 40, fasc. 2, p. 117—148.

Поступила 22 сентября 1978 г.