УДК 517.5

Н. А. ДАВЫДОВ, В. А. ЛОТОЦКИЙ, Г. А. МИХАЛИН

РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕННО НЕЭФФЕКТИВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Хорошо известны теоремы Агнью (1, с. 379), Мерсера (2, с. 135) и др., дающие достаточные условия для того, чтобы метод суммирования, задаваемый регулярной матрицей, был ограниченно неэффективен, т. е. не суммировал ни одной расходящейся ограниченной последовательности. В настоящей статье мы укажем целый класс ограниченно неэффективных регулярных положительных матричных методов суммирования. Нами приняты те же обозначения и определения, что и в работе [1].

Комплексная последовательность $\{S_n\}$ суммируется к числу S матрицей $A = \|a_{nk}\|$ (n и $k = 0, 1, 2, \ldots$), если ряды $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k$ сходятся для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} t_n = S$ [2, с. 61].

Справедлива следующая

Теорема. *Регулярная нижняя треугольная положительная матрица* $A = \|a_{nk}\|$ *не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности, если она удовлетворяет одновременно следующим двум условиям:*

1) для каждого фиксированного $k > 1$ *справедливы неравенства* $a_{nk} \geqslant a_{n+1k}$ *для* $n = 0, 1, 2, \ldots, k-2$, $a_{kk} - a_{k+1k} \geqslant \alpha > 0$, (1), *где число* α *не зависит от* k,

2) *для любого числа* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует натуральное число* $p(\varepsilon)$ *такое, что для всех* $n \geqslant n_0 \geqslant p$ *справедливо неравенство* $a_{nn-p} + a_{nn-p+1} + \ldots + a_{nn} > 1 - \varepsilon$ (2).

Доказательство. Без ограничения общности последовательность $\{S_n\}$ можем считать действительной и $0 = \underline{S} \leqslant S_k \leqslant \overline{S}$, где $\underline{S} = \varliminf_{n\to\infty} S_n < \varlimsup_{n\to\infty} S_n = \overline{S}$. Заметим, что регулярная положитель ая матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая неравенствам (1):

а) не может суммировать ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_k\}$ к ее нижнему пределу $\underline{S} = 0$,

б) не может суммировать ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_k\}$, для которой существует подпоследовательность $\{S_{q_i}\}$ такая, что $S_{q_i} \to \underline{S} = 0$ $(i \to \infty)$, $S_{q_i-1} \to \beta > 0$ $(i \to \infty)$ (3)*. Действительно, если $\overline{S} = \lim_{i\to\infty} S_{n_i}$, то $t_{n_i} = \sum_{\nu=0}^{n_i} a_{n_i\nu} S_\nu \geqslant \geqslant a_{n_i n_i} S_{n_i} \geqslant \alpha S_{n_i} \to \alpha \overline{S} > 0$ $(i \to \infty)$, и утверждение а) доказано.

Если для ограниченной расходящейся последовательности $\{S_k\}$ справедливо (3), то

$$t_{q_i-1} - t_{q_i} = \sum_{\nu=0}^{q_i-2} (a_{q_i-1\nu} - a_{q_i\nu}) S_\nu + (a_{q_i-1\,q_i-1} - a_{q_iq_i-1}) S_{q_i-1} +$$

$$+ (a_{q_i-1q_i} - a_{q_iq_i}) S_{q_i} \geqslant (a_{q_i-1q_i-1} - a_{q_iq_i-1}) S_{q_i-1} + (a_{q_i-1q_i} -$$

$$- a_{q_iq_i}) S_{q_i} \geqslant (a_{q_i-1q_i-1} - a_{q_iq_i-1}) S_{q_i-1} + 0(1) \geqslant \alpha\beta + 0(1).$$

---

* Условию (3) удовлетворяет, например, всякая ограниченная последовательность $\{S_k\}$, для которой нижний предел $\underline{S}$ является изолированным частичным пределом множества всех частичных пределов последовательности $\{S_k\}$.

Следовательно, $\{t_n\}$ — расходящаяся последовательность, и утверждение б) доказано.

Ведя доказательство теоремы методом рассуждения от противного, предположим, что регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая одновременно двум условиям (1), (2), суммирует некоторую расходящуюся ограниченную последовательность $\{S_k\}$ к S. Тогда, в силу сделанного выше замечания а), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k = S > 0.$$

Число $\varepsilon > 0$ в неравенстве (2) возьмем столь малым, чтобы $\varepsilon \times \times \bar{S} < S/3$ (4). Для γ, $0 < \gamma < S/3$ (5) можно построить последовательности $\{m_\nu\}$, $\{k_\nu\}$ такие, что $S_{m_\nu} \to 0\,(\nu\to\infty)$, $m_{\nu-1} < k_\nu \leqslant \leqslant m_\nu$, (6). $S_k < \gamma$ для $k \in [k_\nu;\ m_\nu]$, $S_{k_\nu - 1} \geqslant \gamma\,(\nu = 1, 2, \ldots)$. Возможны два случая: I) $\lim\limits_{\nu\to\infty}(m_\nu - k_\nu) = +\infty$, II) $\varliminf\limits_{\nu\to\infty}(m_\nu - k_\nu) < +\infty$.

В случае I) с учетом (2) — (6) имеем

$$t_{m_\nu} = \sum_{j=0}^{m_\nu} a_{m_\nu j} S_j = \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} a_{m_\nu j} S_j + \sum_{j=k_\nu}^{m_\nu} a_{m_\nu j} S_j \leqslant \bar{S} \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} a_{m_\nu j} +$$

$$+ \gamma \sum_{j=k_\nu}^{m_\nu} a_{m_\nu j} \leqslant S\,(1 - \sum_{j=m_\nu - p}^{m_\nu} a_{m_\nu j}) + \gamma + 0\,(1) < \varepsilon \bar{S} + \gamma + 0\,(1) <$$

$$< \frac{S}{3} + \frac{S}{3} + 0\,(1) = \frac{2}{3}\varepsilon + 0\,(1).$$

Полученное неравенство противоречит нашему предположению, что $t_n \to S\,(n\to\infty)$.

В случае II) существует подпоследовательность $\{Sq_j\}$ такая, что будет верно условие (3). В этом случае регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условию (1), в силу замечания б), сделанного выше, не может суммировать расходящуюся ограниченную последовательность $\{S_k\}$. Опять получили противоречие. Теорема доказана.

Замечания: I. Регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условию (I), не может суммировать неограниченную последовательность $\{S_k\}$, все члены которой содержатся в угле раствора меньше π [3, теорема 7].

2. Регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условию (2), сохраняет ядро всякой ограниченной последовательности $\{S_k\}$, для которой $S_k - S_{k-1} = 0\,(1)$ [4, теорема 4].

3. Нижняя треугольная регулярная положительная матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условию (2), не суммирует всякую неограниченную последовательность $\{S_k\}$, для которой $S_k - S_{k-1} = = 0\,(1)$ [4, лемма 2].

Список литературы: 1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. —М.: Физматгиз, 1960.—360 с. 2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.—М.: ГИИЛ, 1951. — 480 с. 3. *Давыдов Н. А.* Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами. —Мат. заметки, 1973, **13**, № 2. с. 179—188. 4. *Давыдов Н. А.* Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах последовательностей. —Укр. мат. журн. 1978, **30**, № 6, с. 723—730.

Поступила в редколлегию 22. 06. 77.