УДК 517.535.4

А. З. МОХОНЬКО

ОЦЕНКИ РОСТА ВЕТВЕЙ АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК. ПРИЛОЖЕНИЯ II

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [1]. С помощью полученных в [1] оценок роста ветвей алгеброидных функций даются априорные оценки роста решений алгебраических дифференциальных уравнений (д. у.). Получены результаты, связанные с теоремой Мальмквиста [2]. Скажем, что $\varphi(z)\in M_\infty$, если $\varphi(z)$ — мероморфная в $\boldsymbol{C}$ функция. Напомним некоторые сведения о ломаной Ньютона (л. Н.). Пусть дано д. у.

$$\Phi(z, f, f') = f'^n P_0 + \cdots + f' P_{n-1} + P_n = 0, \tag{1}$$

$$P_j(z, f) = \sum\nolimits_{i=0}^{\varkappa_j} a_{ij} f^{\varkappa_j - i}; \quad a_{ij}(z) \in M_\infty, \quad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{2}$$

Отметим на плоскости систему K точек $(j, \varkappa_j)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, где $\varkappa_j$ определены в (2). Построим для точек K л. Н.: найдем выпуклую оболочку множества K; граница оболочки есть многоугольник, который точками $(0, \varkappa_0)$, $(n, \varkappa_n)$ разбивается на две ломаные, верхняя из них и есть л. Н. Пусть вершины л. Н. имеют абсциссы $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_t = n$. Положим

$$\alpha_k = (\varkappa_{i_k} - \varkappa_{i_{k-1}})/(i_k - i_{k-1}), \quad 1 \leqslant k \leqslant t. \tag{3}$$

Очевидно, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_t$. Пусть

$$\alpha = \min\{\alpha_k : \alpha_k > 0\}; \quad \gamma = \max \alpha_k. \tag{4}$$

В работе [2] доказана теорема, имеющая многочисленные приложения (см. [3]).

Теорема А. *Пусть д. у. задается условиями (1), (2), причем все коэффициенты $a_{ij}(z)$ — многочлены и $\Phi(z, f, f')$ неприводим как многочлен от f и f' над полем рациональных функций. Если $f(z) \in M_\infty$ — трансцендентное решение, то $\varkappa_j \leqslant 2j$; $0 \leqslant j \leqslant n$.*

Используя понятие л. Н., теорему А можно сформулировать так: если выполнены условия теоремы А, то $\varkappa_0 = 0$, $\alpha_1 \leqslant 2$.

Пусть $\Gamma = \{E : E \subset [0, \infty), \operatorname{mes} E < \infty\}$; $\lambda(r) > 0$ — некоторая неубывающая функция, $0 < r < \infty$. Пусть $\Lambda = \{f : f \in M_\infty, \ \exists E \in \Gamma, T(r, f) = O(\lambda(r)), \ r \overline{\in} E\}$. Если, например, $\lambda(r) = \ln r$, тогда Λ — это класс рациональных функций. Если $f \in M_\infty$ и $f \overline{\in} \Lambda$, то f — трансцендентная функция. Когда $\lambda(r) = C > 0$, $C = \mathrm{const}$, то класс Λ — это множество комплексных чисел.

Докажем теоремы, дополняющие теорему А.

Теорема 1. *Пусть в д. у. (1), которое может быть приводимым, коэффициенты $a_{ij}(z) \in \Lambda$; $f(z) \in M_\infty$ — решение (1) и $f \overline{\in} \Lambda$. Тогда $\alpha \leqslant 2$.*

Теорема 2. *Пусть в д. у. (1) коэффициенты $a_{ij} \in \Lambda$. Пусть $f(z)$ — целое решение (1) и $f \overline{\in} \Lambda$. Тогда $\alpha \leqslant 1$.*

Обсудим, почему имеет смысл рассматривать подобного рода утверждения. Применим последовательно теорему А и теорему 1 к д. у. $\Phi(z, f, f') = f'^3 + f'^2 f^3 + f^8 - 1 = 0$. В этом уравнении $\alpha_1 = 3 > 2$. Поэтому на основании теоремы А можно сделать вывод: либо данное уравнение не имеет трансцендентных решений, либо многочлен $\Phi(z, f, f')$ приводим. (Требование неприводимости в теореме А существенно. Нам неизвестны эффективные результаты, позволяющие в общем случае для многочлена от двух переменных с рациональными или мероморфными коэффициентами сказать, приводим этот многочлен или нет над полем рациональных или мероморфных функций и как осуществить возможность приведения многочлена (см. [4, с. 122]). Требование неприводимости при использовании теоремы А является неудобным. Применим теорему 1 к этому д. у. В нем все $a_{ij}(z) \equiv \mathrm{const}$, т. е. $a_{ij} \in \Lambda$, где Λ — множество комплексных чисел; $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_1 = 3$, $\varkappa_2 = 0$, $\varkappa_3 = 8$; $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5/2$; $\alpha = \alpha_2 = 5/2 > 2$. Д. у. не имеет ни трансцендентных, ни рациональных решений, отличных от констант. Так как $\alpha > 2$, то из теоремы 1 следует: если $f \in M_\infty$ — решение д. у., то $f \in \Lambda$, т. е. $f(z) \equiv \mathrm{const}$. Для теорем 1 и 2 приводимость многочлена $\Phi(z, f, f')$ не имеет значения. Кроме того, в этих теоремах коэффициенты $a_{ij}(z)$ могут быть произвольными мероморфными функциями, а не только многочленами.

Покажем точность оценок для α в теореме 1 и 2.

Пример 1. Уравнение $f'^2(f + 1) + f'(f^4 - f^2 + 1) - f^5 + f^4 = (f' - f + 1)((f + 1)f' + f^4) = 0$ имеет решение $f(z) = e^z + 1$. Здесь все $a_{ij}(z) \equiv \mathrm{const}$; $\varkappa_0 = 1$, $\varkappa_1 = 4$; $\varkappa_2 = 5$; $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = \alpha = 1$; $T(r, e^z + 1) \neq O\left(\sum T(r, a_{ij})\right) = O(1)$. Пример показывает точность оценки для α в теореме 2.

Пример 2. Покажем, что в теореме 1 может быть $\alpha = 2$. Д. у. $f' + f^2 = 0$ имеет решение $f(z) = z^{-1}$. Здесь все $a_{ij}(z) \equiv \mathrm{const}$; $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_1 = 2$; $\alpha_1 = \alpha = 2$; $T(r, z^{-1}) = \ln^+ r \neq O\left(\sum T(r, a_{ij})\right) = O(1)$.

Известна теорема Dumas [5, с. 251]. Зная л. Н. для уравнений $\Phi_1(z, f, f') = 0$, $\Phi_2(z, f, f') = 0$, строят л. Н. для уравнения

$\Phi_1(z, f, f')\Phi_2(z, f, f')=0$ так: «нужно считать отрезки обеих ломаных векторами и построить при помощи всех этих векторов выпуклую ломаную, что приводит к одной единственной л. Н′».

Возьмем д. у. $\Phi(z, f, f')=0$, в котором многочлен $\Phi(z, f, f')$ неприводим и для л. Н. которого $\alpha>2$. Возьмем некоторый многочлен $\Phi_1(z, f, f')$, для л. Н. которого также $\alpha>2$. Тогда и уравнение $\Phi(z, f, f')\Phi_1(z, f, f')=0$, как следует из теоремы Дюма, имеет л. Н. с $\alpha>2$. Поэтому применение теоремы А к уравнению $\Phi(z, f, f')=0$ и применение теоремы 1 к уравнению $\Phi(z, f, f')\times\times\Phi_1(z, f, f')=0$ дает один и тот же результат: эти д. у. не имеют трансцендентных решений. Однако, если взять многочлен $\Phi_2(z, f, f')$, у которого л. Н. имеет α, $0<\alpha\leqslant 2$, то из теоремы Дюма следует, что для уравнения $\Phi(z, f, f')\Phi_2(z, f, f')=0$, л. Н. имеет $\alpha\leqslant 2$. В этом случае теорема 1 не может уже утверждать, что д. у. $\Phi(z, f, f')\Phi_2(z, f, f')=0$ не имеет трансцендентных решений. Но это и понятно. Трансцендентные решения могут появиться за счет $\Phi_2(z, f, f')$.

Пусть дано уравнение

$$P_0u^n+\cdots+P_{n-1}u+P_n=0;\quad P_j(z)\in M_\infty,\quad 0\leqslant j\leqslant n. \tag{5}$$

Решение $u=u(z)$ уравнения (5) есть n-значная алгеброидная функция. Эти n значений $u(z)$ расположим в порядке убывания модуля $|u_1|\geqslant\ \dots\ \geqslant|u_n|$. Пусть в уравнении (5) коэффициенты P_j определяются формулами (2). Пусть $C=4n\max(\varkappa_j+1)\,n!$. Положим

$$B=B(z)=C\max_{i,j,s,t}|a_{ij}(z)/a_{st}(z)|>1,\quad \nu=(8B^n)^{-1},$$

$$\beta=\min(\alpha_s-\alpha_{s+1})>0, \tag{6}$$

где α_s определены в (3). Пусть σ — множество значений θ, $0\leqslant\leqslant\theta<2\pi$, для которых

$$|f(re^{i\theta})|>\max[B,\ (8BC)^{(n^2+1)/\beta}]>1. \tag{7}$$

Нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема Б [1]. *На множестве σ для решений уравнения (5) с коэффициентами P_j, определенными в (2), выполняются неравенства*

$$\nu|f|^{\alpha_k}\leqslant|u_\tau|\leqslant B|f|^{\alpha_k}, \tag{8}$$

если $i_{k-1}+1\leqslant\tau\leqslant i_k$, $1\leqslant k\leqslant t$, где α_k определены в (3).

Теорема В [7]. *Пусть $\Phi(z)=\sum a_{ij}w^iv^j\equiv 0$, где степень Φ относительно w равна m, а относительно v равна d, причем $w(z)$, $v(z)$, $a_{ij}(z)\in M_\infty$. Тогда $m^{-1}T(r, v)-m^{-1}\sum T(r, a_{ij})\leqslant T(r, w)+0(1)\leqslant dT(r, v)+\sum T(r, a_{ij})$.*

Доказательство теорем 1 и 2. Пусть $\varphi\in M_\infty$, $\sigma\subset[0, 2\pi)$. Положим $m_\sigma(r, \varphi)=\int_\sigma\ln^+|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta$. Запишем лемму о логарифмической производной в форме (см. [6])

$$m_\sigma(r, \varphi'/\varphi)=o(T(r, \varphi)),\quad r\,\overline{\in}\,E. \tag{9}$$

Из (9) следует $(r \overline{\in} E)$

$$m_\sigma(r, \varphi') \leqslant m_\sigma(r, \varphi'/\varphi) + m_\sigma(r, \varphi) = m_\sigma(r, \varphi) + o(T(r, \varphi)). \qquad (10)$$

Пусть $f(z) \in M_\infty$ — решение д. у. (1)—(2). Тогда $u = f'(z)$ есть одна из ветвей алгеброидной функции $u(z)$, определяемой уравнением (5) с коэффициентами (2). Поэтому для $u = f'(z)$ справедлива теорема Б. Пусть $\sigma(k) = \sigma(\alpha_k) \subset \sigma$ — множество значений θ, для которых

$$\nu |f(re^{i\theta})|^{\alpha_k} \leqslant |f'(re^{i\theta})| \leqslant B |f(re^{i\theta})|^{\alpha_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant t. \qquad (11)$$

Из (11), учитывая (6) и определение $m_\sigma(r, \varphi)$, получаем

$$m_{\sigma(k)}(r, f') = \alpha_k m_{\sigma(k)}(r, f) + O\left(\sum T(r, a_{ij})\right). \qquad (12)$$

На множестве $\sigma(k)$, учитывая (10), имеем $m_{\sigma(k)}(r, f) + o(T(r, f)) > > m_{\sigma(k)}(r, f') = \alpha_k m_{\sigma(k)}(r, f) + O\left(\sum T(r, a_{ij})\right)$. Если $\alpha_k > 1$, то из предыдущего соотношения и (12) следует

$$m_{\sigma(k)}(r, f) = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right) + o(T(r, f)) \ (r \overline{\in} E) \ \alpha_k > 1. \qquad (13)$$

Пусть $\sigma(0) = [0, 2\pi) \setminus \sigma$. Из (10), (6), (7) следует $m_{\sigma(0)}(r, f') \leqslant \leqslant m_{\sigma(0)}(r, f) + o(T(r, f)) = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right) + o(T(r, f))$. Но $[0, 2\pi) = = \bigcup_{k=0}^{+} \sigma(k)$, поэтому из (13) и последнего неравенства имеем

$$m(r, f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{0 < \alpha_k \leqslant 1} m_{\sigma(k)}(r, f) + \Omega(r) \ \ (r \overline{\in} E), \qquad (14)$$

где $\Omega(r) = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right) + o(T(r, f))$. Если $\alpha > 1$, то из (4, 14) имеем

$$m(r, f') = \Omega(r) \ (r \overline{\in} E) \ \alpha > 1. \qquad (15)$$

Предположим теперь, что $f(z)$ — целое решение (1). Тогда $m(r, f) = = T(r, f)$, $m(r, f') = T(r, f')$, и функции $w = f'$ и $v = f$ удовлетворяют условиям теоремы В. Поэтому из (15) и теоремы В следует $(r \overline{\in} E)$, $(T(r, f) = m(r, f) = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right)$, т. е. $f \in \Lambda$. Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 1. Покажем, что для $f \in M_\infty$ — решения (1), выполняется

$$N(r, f') \geqslant \alpha N(r, f) + O\left(\sum N(r, a_{ij}/a_{st})\right). \qquad (16)$$

$$N(r, f') \leqslant \gamma N(r, f) + O\left(\sum N(r, a_{ij}/a_{st})\right). \qquad (17)$$

Положим

$$L = \{z : z = re^{i\theta}, \ \theta \in \sigma\}. \qquad (18)$$

Обозначим через $n(z_0, \varphi)$, $\varphi \in M_\infty$ величину, равную порядку полюса $\varphi(z)$ в точке z_0 или 0, если $\varphi(z_0) \neq \infty$. Совокупность всех полюсов $f(z)$ обозначим через D. Функции f' и f имеют полюсы в одних точках, и

$$n(z_0, f') = n(z_0, f) + 1, \ f(z_0) = \infty. \qquad (19)$$

Положим

$$D_* = \{z_0 : f(z_0) = \infty,\ n(z_0, f) > \max n(z_0 (a_{ij}/a_{st})^p)\}, \tag{20}$$
$$D_0 = D \setminus D_*,$$

где p — фиксированное, $p > \max[1, (n^2+1)\beta^{-1}]$ (см, (7)). Пусть $z_0 \in D_*$. Из (18), (20), (7) следует, что для некоторого $\delta > 0$ выполняется $\{0 < |z - z_0| < \delta\} = \delta(z_0) \subset L$, т. е. в целой окрестности z_0 имеем какое-то из неравенств

$$\nu |f|^{\alpha_k} \leqslant |f'| \leqslant B |f|^{\alpha_k}. \tag{21}$$

Из (19), (20) и второго из неравенств (21) следует, что в (21) обязательно $\alpha_k > 0$. Поэтому из (21) и (4) получаем

$$\nu |f|^{\alpha} \leqslant |f'| \leqslant B |f|^{\gamma},\quad z \in \delta(z_0);\ z_0 \in D_*. \tag{22}$$

Пусть $n(z_0, a) = \sum n(z_0, a_{ij}/a_{st})$, где сумма взята по всем возможным частным a_{ij}/a_{st}, коэффициентов a_{ij} из (1)—(2). Из (22, 6) следует $(z_0 \in D_*)$

$$\gamma n(z_0, f) + n(z_0, a) \geqslant n(z_0, f') \geqslant \alpha n(z_0, f) - n \cdot n(z_0, a). \tag{23}$$

Пусть $z_0 \in D_0$. Из (19), (20) получаем

$$n(z_0, f') \leqslant 2n(z_0, f) \leqslant 2pn(z_0, a);\ z_0 \in D_0. \tag{24}$$

Из (23), (24) следует, что для всех $z_0 \in D$ имеем (q, d — некоторые константы) $\gamma n(z_0, f) + qn(z_0, a) \geqslant n(z_0, f') \geqslant \alpha n(z_0, f) - dn(z_0, a)$. Отсюда и следует (16), (17). Из (16), (19) получаем

$$2N(r, f) \geqslant N(r, f') \geqslant \alpha N(r, f) + O\left(\sum N(r, a_{ij}/a_{st})\right). \tag{25}$$

Пусть теперь $\alpha > 2$. Тогда из (25) следует

$$N(r, f) = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right),\quad \alpha > 2. \tag{26}$$

Из (26) и (15) получаем $T(r, f') = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right)$; $r \overline{\in} E$; $\alpha > 2$. Отсюда и из теоремы В, как и при доказательстве теоремы 2, следует $T(r, f) = O\left(\sum T(r, a_{ij})\right)$, т. е. $f \in \Lambda$. Теорема 1 доказана.

Список литературы: 1. *Мохонько А. З.* Оценки роста ветвей алгеброидных функций и их неванлинновских характеристик. I.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1980, вып. 33, с. 29—35. 2. *Malmquist J.* Sur les fonctions à un nombre finide branches satisfaisant à une èquation differentielle du preimier ordre.— Acta math., 1920, vol. 42, p. 317—325. 3. *Гольдберг А. А.* Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка.— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, с. 254—261. 4. *Ван дер Варден.* Алгебра.— М.: Наука, 1976. —648 с. 5. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М. —Л.: ОГИЗ, 1948. —396 с. 6. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970. —592 с. 7. *Мохонько А. З.* О неванлинновских характеристиках для одного класса мероморфных кривых.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1976, вып. 25, с. 95—105.

Поступила 25 сентября 1978 г.