УДК 517.521.8

Г. А. МИХАЛИН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛОВ СТИЛЬТЬЕСА

1. Пусть $\varphi(t)$ — неубывающая функция, определенная в промежутке $[0, +\infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \to +\infty$ $(t \to \infty)$, $f(t)$ — комплексно-значная функция, непрерывная в промежутке $[0, +\infty)$, и пусть

$$F(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^x f(t)\, d\varphi(t) \quad (x > 0). \tag{1}$$

Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости назовем (R_p, φ)-множеством функции $f(t)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа λ, λ_1 и последовательности $\{\alpha_k^{(\nu)}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2^p)$, зависящие от ε, такие, что

$$f(t) \in G_\varepsilon \left(\alpha_k^{(1)} \leqslant t \leqslant \alpha_k^{(2^p)}\right), \ \lambda_1 \geqslant \frac{\varphi(\alpha_k^{(\nu+1)})}{\varphi(\alpha_k^{(\nu)})} \geqslant \lambda > 1$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, 2^p - 1), \ (k = 1, 2, \ldots), \ \lim_{k \to \infty} \alpha_k^{(1)} = +\infty, \tag{2}$$

где G_ε — замкнутая выпуклая ε-окрестность множества G.

Если (R_p, φ)-множество является точкой, то эту точку назовем (R_p, φ)-точкой функции $f(t)$.

Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости назовем (R_p, φ)-точкой функции $f(t)$, если существуют число $\lambda > 1$ последовательности $\{\alpha_k^{(\nu)}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2^p)$ и последовательности $\{\theta_k\}$ такие, что

$$0 < \min_{\alpha_k^{(1)} \leqslant t \leqslant \alpha_k^{2^p}} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} f(t) \to +\infty, \ \frac{\varphi(\alpha_k^{(\nu+1)})}{\alpha(\alpha_k^{(\nu)})} \geqslant \lambda > 1$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, 2^p - 1), \ (k = 1, 2, \ldots), \ \lim_{k \to \infty} \alpha_k^{(1)} = +\infty. \tag{3}$$

Для $p = 1$ сформулированные определения принадлежат Н. А Давыдову [1]. Ему же принадлежит и следующее утверждение [1, 2].

Теорема А. *Пусть* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = S$, *где* $F(x)$ *определена* (1), G — (R_1, φ)-*множество функции* $f(t)$. *Тогда* $S \in G$.

Если же бесконечно удаленная точка — (R_1, φ)-точка функции $f(t)$, то $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}|F(x)| = +\infty$.

В настоящей работе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если бесконечно удаленная точка — (R_p, φ) $(p>1)$-точка функции $f(t)$, то она и (R_{p-1}, φ)-точка функции $F(x)$.*

Если же множество G — (R_p, φ) $(p > 1)$-множество функции $f(t)$, то справедливо по крайней мере одно из следующих трех утверждений: 1) бесконечно удаленная точка — (R_{p-1}, φ)-точка функции $F(x)$; 2) функция $F(x)$ имеет два непересекающихся (R_{p-1}, φ)-множества; 3) множество G — (R_{p-1}, φ)-множество функции $F(x)$.

2. Доказательство первой части теоремы 1. Пусть бесконечно удаленная точка является (R_p, φ)-точкой функции $f(t)$. Тогда существуют число $\lambda > 1$, последовательности $\{\alpha_k^{(\nu)}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2^p)$ и $\{\theta_k\}$ такие, что имеет место (3).

Заметим, что если $x > y$, то

$$F(x) \equiv \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_0^x f(t)\, d\varphi(t) = F(y) \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_y^x f(t)\, d\varphi(t). \tag{4}$$

Возможны два случая:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} F\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right) > -\infty \tag{5}$$

или

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} F\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right) = -\infty. \tag{6}$$

Пусть имеет место (5). Тогда существуют последовательность $\{k_j\}$ и число $H > 0$ такие, что $\operatorname{Re} e^{i\theta_k} F(\alpha_k^{(2^{p-1})}) > -H$ $(k = k_j,$ $j = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $\alpha_k^{(2^{p-1}+1)} \leqslant x \leqslant \alpha_k^{(2^p)}$. Учитывая (4), (3), имеем

$$\operatorname{Re} e^{i\theta_k} F(x) = \operatorname{Re} e^{i\theta_k} \left(F\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right) \frac{\varphi\left(\alpha_k^{(2p-1)}\right)}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_{\alpha_k^{(2^{p-1})}}^x f(t)\, d\varphi(t) \right) \geqslant$$

$$\geqslant -H + \min_{\alpha_k^{(2^{p-1})} \leqslant t \leqslant \alpha_k^{(2^p)}} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} f(t) \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \to +\infty \quad (k = k_j \to \infty).$$

В силу этого

$$\min_{\alpha_k^{(2^{p-1}+1)} \leqslant x \leqslant \alpha_k^{(2^p)}} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} F(x) \to +\infty \quad (k = k_j \to +\infty),$$

а это значит, что бесконечно удаленная точка является (R_{p-1}, φ)-точкой функции $F(x)$.

Пусть имеет место (6) и $x \in [\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2^p-1)}]$ $(k > K)$. Учитывая, что

$$\operatorname{Re} e^{i\theta_k} F(\alpha_k^{(2^p-1)}) = \operatorname{Re} e^{i\theta_k}\left(F(x)\frac{\varphi(x)}{\varphi(\alpha_k^{(2^p-1)})} + \frac{1}{\varphi(\alpha_k^{(2^p-1)})}\int_x^{\alpha_k^{(2^p-1)}} \times\right.$$

$$\left.\times f(t)\, d\varphi(t)\right) \geqslant \operatorname{Re} e^{i\theta_k} F(x),$$

имеем

$$\max_{\alpha_k^{(1)} \leqslant x \leqslant \alpha_k^{(2^p-1)}} \operatorname{Re} e^{i\theta_k} F(x) \to -\infty \quad (k \to \infty).$$

В силу этого

$$\min_{\alpha_k^{(1)} \leqslant x \leqslant \alpha_k^{(2^p-1)}} \operatorname{Re} e^{i(\theta_k+\pi)} F(x) \to +\infty \quad (k \to \infty),$$

и значит, бесконечно удаленная точка — (R_{p-1}, φ)-точка функции $F(x)$. Первая часть теоремы 1 доказана.

3. Доказательство второй части теоремы 1. Если G — вся комплексная плоскость, то утверждение второй части теоремы 1 справедливо. Пусть G — отличное от всей комплексной плоскости (R_p, φ)-множество функции $f(t)$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда найдутся числа $\lambda_1 \geqslant \lambda > 1$ и последовательности $\{\alpha_k^{(\nu)}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots 2^p)$, для которых имеет место (2).

Пусть $\{G_l\}$ — такое множество замкнутых полуплоскостей, определяемых прямыми l, что $G_\varepsilon = \bigcap_l G_l$, $l \cap G_\varepsilon \neq \varnothing$, и пусть $G_l(\delta)$ — такая замкнутая полуплоскость, определяемая прямой $l(\delta)$, что $G_{l(\delta)} \supset G_l$ и $\rho(l(\delta), l) = \delta$. На каждой прямой l, которая определяет полуплоскость G_l, выберем направление, при движении вдоль которого полуплоскость G_l остается справа. Пусть $\theta(l)$ — это угол, на который надо повернуть в положительном направлении прямую l вокруг точки $z = 0$, чтобы выбранное направление прямой l совпадало бы с положительным направлением оси $\operatorname{Re} z = 0$.

Для последовательности $\{F(\alpha_k^{(2^p-1)})\}$ возможны четыре случая: 1) $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^p-1)}), G_\varepsilon) = 0$; 2) $\varliminf\limits_{k\to\infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^p-1)}), G_\varepsilon) > 0$, причем существуют полуплоскость $G_{l(\delta)}$ и последовательность $\{k_j\}$ такие, что $\lim\limits_{k=k_j\to\infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^p-1)}), G_{l(\delta)}) > 0$ и $\varlimsup\limits_{k=k_j\to\infty} \operatorname{Re} e^{i\theta(l)} F(\alpha_k^{(2^p-1)}) = -\infty$;

3) это случай 2), но только $\varlimsup\limits_{k=k_j\to\infty} \operatorname{Re} e^{i\theta(l)} F(\alpha_k^{(2^p-1)}) > -\infty$;

4) $\varliminf\limits_{k\to\infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^p-1)}), G_\varepsilon) > 0$ и для любой полуплоскости $G_{l(\delta)}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^p-1)}), G_{l(\delta)}) = 0$.

Пусть имеет место случай 1). Тогда существует последовательность $\{k_j\}$ такая, что $F(\alpha_k^{(2^p-1)}) \in G_{2\varepsilon}$ $(k = k_j)$. Пусть $x \in [\alpha_k^{(2^{p-1}+1)}, \alpha_k^{(2^p)}]$.

Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\varphi(x)-\varphi\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right)}\int\limits_{\alpha_k^{(2^{p-1})}}^{x}\times$$

$$\times\frac{\varphi\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right)F\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right)+\left(\varphi(x)-\varphi\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right)\right)f(t)}{\varphi(x)}\,d\varphi(t),$$

и значит, $F(x)\in G_{2\varepsilon}$ для $x\in[\alpha_k^{(2^{p-1}+1)},\ \alpha_k^{(2^p)}]$ $(k=k_j)$.

Итак, если для любого $\varepsilon>0$ имеет место случай 1), то множество G является $(R_{p-1},\ \varphi)$-множеством функции $F(x)$.

Рассмотрим случай 2). Можно считать, что $\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}f(t)\geqslant\delta$, $t\in[\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k^{(2^p)}]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, так как в противном случае можно было бы сделать параллельный перенос. Пусть $0>\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(\alpha_k^{(2^{p-1})})\to\to-\infty$ $(k=k_{j_\nu}\to\infty)$ и пусть $x\in[\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k^{(2^{p-1})}]$ $(k=k_{j_\nu})$. Тогда

$$0>\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(\alpha_k^{(2^{p-1})})=\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}\Bigl(F(x)\frac{\varphi(x)}{\varphi\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right)}+$$

$$+\frac{1}{\varphi\left(\alpha_k^{(2^{p-1})}\right)}\int\limits_{x}^{\alpha_k^{(2^{p-1})}}f(t)\,d\varphi(t)\Bigr)\geqslant\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(x).\tag{7}$$

Отсюда $\min\limits_{\alpha_k^{(1)}\leqslant x\leqslant\alpha_k^{(2^{p-1})}}\operatorname{Re}e^{i(\theta(l)+\pi)}\to+\infty$ $(k=k_{j_\nu}\to\infty)$, и следовательно, бесконечно удаленная точка является $(R_{p-1},\ \varphi)$-точкой функции $F(x)$.

Рассмотрим случай 3). Учитывая замечание, сделанное при рассмотрении случая 2), имеем: существует $C<0$ такое, что $-C<\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(\alpha_{k_j}^{(2^{p-1})})<0$ и, значит, существует последовательность $\{j_\nu\}$, для которой

$$\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(\alpha_k^{(2^{p-1})})\to\beta\leqslant0\ (k=k_{j_\nu}\to\infty).\tag{8}$$

Из (8) и (7) получаем, что полуплоскость $\operatorname{Re}z\leqslant\beta$ является $(R_{p-1},\ \varphi)$-множеством функции $F(x)\,e^{i\theta(l)}$.

Пусть $x\in[\alpha_k^{(2^{p-1}+1)},\ \alpha_k^{(2^p)}]\,(k=k_{j_\nu})$. Учитывая (2) и неравенство $\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}f(t)\geqslant\delta$ $(t\in[\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k^{(2^p)}],\ k=1,\ 2,\ \ldots)$, имеем

$$\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(x)=\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}\left(F(\alpha_k^{(2^{p-1})})\frac{\varphi(\alpha_k^{(2^{p-1})})}{\varphi(x)}+\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_{\alpha_k^{(2^{p-1})}}^{x}f(t)\,d\varphi(t)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(\alpha_k^{(2^{p-1})})+\delta\left(1-\frac{\varphi(\alpha_k^{(2^{p-1})})}{\varphi(x)}\right)\geqslant\operatorname{Re}e^{i\theta(l)}F(\alpha_k^{(2^{p-1})})+\delta\left(1-\frac{1}{\lambda}\right).$$

Отсюда и из (8) вытекает, что полуплоскость $\operatorname{Re} z \geqslant \beta + \delta \times \times \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$ является (R_{p-1}, φ)-множеством функции $e^{i\theta(l)} F(x)$. В силу этого функция $F(x)$ имеет два непересекающихся (R_{p-1}, φ)-множества.

Рассмотрим случай 4). Покажем, что $|F(\alpha_k^{(2^{p-1})})| \to \infty$ $(k \to \infty)$. Допустив противное, получим существование последовательности $\{k_j\}$, для которой $F(\alpha_k^{(2^{p-1})}) \to \beta \neq \infty$ $(k = k_j \to \infty)$. Так как $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^{p-1})}), G_\varepsilon) > 0$, то $\beta \notin G_\varepsilon$. Учитывая замкнутость и выпуклость множества G_ε, получаем существование полуплоскости $G_{l(\delta)}$, которой не принадлежит β вместе со своей некоторой окрестностью, а это противоречит условию $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(F(\alpha_k^{(2^{p-1})}), G_{l(\delta)}) = 0$ для любой полуплоскости $G_{l(\delta)}$.

Учитывая условия случая 4) и то, что $|F(\alpha_k^{(2^{p-1})})| \to +\infty$, получаем существование полуплоскости G_l и последовательности $\{k_j\}$, для которых $\operatorname{Re} e^{i\theta(l)} F(\alpha_{k_j}^{(2^{p-1})}) \to +\infty$ $(j \to \infty)$. В силу этого и в силу замечания, сделанного при рассмотрении случая 2), имеем для $x \in [\alpha_k^{(2^{p-1}+1)}, \alpha_k^{(2^p)}]$ $(k = k_j)$

$$\operatorname{Re} e^{i\theta(l)} F(x) = \operatorname{Re} e^{i\theta(l)} \left(F(\alpha_k^{(2^{p-1})}) \frac{\varphi(\alpha_k^{(2^{p-1})})}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_{\alpha_k^{(2^{p-1})}}^{x} f(t)\, d\varphi(t) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{Re} e^{i\theta(l)} F(\alpha_k^{(2^{p-1})}) \frac{1}{\lambda_1} \quad (k = k_j, \quad j > J).$$

Отсюда $\min\limits_{\alpha_k^{(2^{p-1}+1)} \leqslant x \leqslant \alpha_k^{(2^p)}} \operatorname{Re} e^{i\theta(l)} F(x) \to +\infty$ $(k = k_j \to \infty)$, и значит, бесконечно удаленная точка является (R_{p-1}, φ)-точкой функции $F(x)$. Теорема 1 доказана.

4. Пусть p и q — натуральные числа и $p < q$. Ясно, что каждое (R_q, φ)-множество функции $f(t)$ является и (R_p, φ)-множеством этой функции. Обратное, вообще говоря, неверно. Покажем это. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 2^{k+1}, & \text{если } 3k - 2 \leqslant x < 3k - 1, \\ 2^{k+1} + 1, & \text{если } 3k - 1 \leqslant x < 3k, \\ 2^{k+1} + 2, & \text{если } 3k \leqslant x < 3k + 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

и

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \quad n = 3k - 1, \\ 0, & \text{если } n = 1, \\ (k+1)(2^{k+1} + 2) - 1, & \text{если } n = 3k, \\ -\dfrac{2^{k+1} + 2}{2^{k+1} - 2}(k+1), & \text{если } n = 3k + 1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

а на промежутках $n < x < n+1$ функция $f(x)$ изменяется линейно от $f(n)$ до $f(n+1)$.

В силу непрерывности функции $f(x)$ существуют последовательности $\{\alpha_k^{(1)}\}$ и $\{\alpha_k^{(2)}\}$, для которых $\alpha_k^{(1)} \in (3k,\ 3k+1)$, $\alpha_k^{(2)} = 3k+1$ и $\max\limits_{\alpha_k^{(1)} \leqslant x \leqslant \alpha_k^{(2)}} f(x) \to -\infty\ (k \to \infty)$. Так как, кроме того, $\frac{\varphi(\alpha_k^{(2)})}{\varphi(\alpha_k^{(1)})} = \frac{2^{k+2}}{2^{k+1}+2} \to 2\ (k \to \infty)$, то бесконечно удаленная точка является $(R_1,\ \varphi)$-точкой функции $f(x)$.

Пусть $p > 1$. В силу определения $f(x)$ и $\varphi(x)$ отрезки $[\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k^{(2p)}]$ из определения бесконечно удаленной $(R_p,\ \varphi)$-точки таковы, что $\alpha_k^{(1)}$ $(k > K)$ могут лежать только в интервалах $(3\nu_k,\ 3\nu_k+1)$, а $\varphi_k^{(2p)}(k > K)$ только в промежутках $[3\nu_k+1,\ 3\nu_k+2)$, следовательно, для любой точки $\alpha_k \in (\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k^{(2p)})$ или $(\alpha_k^{(1)},\ \alpha_k) \subset (3\nu_k,\ 3\nu_k+1)$, или $(\alpha_k,\ \alpha_k^{(2p)}) \subset (3\nu_k+1,\ 3\nu_k+2)$, а потому или $\varphi \times (\alpha_k)/\varphi(\alpha_k^{(1)}) = 1$, или $\varphi(\alpha_k^{(2p)})/\varphi(\alpha_k) = 1\ (k > K)$. Это означает, что бесконечно удаленная точка не является $(R_p,\ \varphi)$-точкой функции $f(x)$, если $n > 1$.

Покажем, что в теореме 1, вообще говоря, нельзя заменить символ $(R_{p-1},\ \varphi)$ символом $(R_p,\ \varphi)$. Пусть $\varphi(x)$ и $f(x)$ определены соответственно равенствами (9) и (10). Легко видеть, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leqslant x < 1, \quad 3k-2 \leqslant x < 3k-1, \\ \dfrac{1}{2^{k+1}+1}, \text{ если } 3k-1 \leqslant x < 3k, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \\ k+1, \qquad \text{если } 3k \leqslant x < 3k+1. \end{cases}$$

Из этого равенства, в силу рассуждений, проведенных ранее, вытекает: бесконечно удаленная точка не является $(R_p,\ \varphi)$-точкой функции $F(x)$ для любого $p \geqslant 1$. Кроме того, очевидно, всякое замкнутое выпуклое множество, содержащее луч $\arg z = 0$, является $(R_p,\ \varphi)\,(p \geqslant 1)$-множеством функции $F(x)$ и никаких других $(R_p,\ \varphi)$-множеств функция $F(x)$ не имеет. Так как эти замкнутые выпуклые множества не являются $(R_p,\ \varphi)$-множествами функции $f(x)$ ни для какого $p \geqslant 1$, то, следовательно, нужное показано.

5. Будем считать, что функция $\varphi(t)$ в преобразовании (1) кроме условий, наложенных на нее в пункте 1, удовлетворяет еще и условию

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x+0) - \varphi(x-0)}{\varphi(x)} = 0, \tag{11}$$

где $\varphi(x+0) = \lim\limits_{y \to x+} \varphi(y)$, $\varphi(x-0) = \lim\limits_{y \to x-} \varphi(y)$. Условию (11) удовлетворяют, например, непрерывные функции. Пусть $\frac{\varphi(\beta_k)}{\varphi(\alpha_k)} \geqslant \lambda > 1$

$(k=1,\ 2,\ \ldots)$, $1<\lambda_1<\lambda$ и $x_k=\inf\left\{x' \mid x'\in[\alpha_k,\ \beta_k],\ \frac{\varphi(x')}{\varphi(\alpha_k)}>\lambda_1\right\}$. Тогда $\frac{\varphi(x)}{\varphi(\alpha_k)}>\lambda_1$ для любого $x\in(x_k,\ \beta_k]$. Из равенства $\frac{\varphi(x)}{\varphi(\alpha_k)}-\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_k)}{\varphi(x_k)}\ \frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}$ вытекает $\varliminf\limits_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}\equiv\delta\geqslant\lambda_1$. Действительно, допустим, что $\delta<\lambda_1$. Можно считать, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}=\delta$. Пусть $\varepsilon=\frac{\lambda_1-\delta}{4}>0$. Для этого $\varepsilon>0$ найдем число $X(\varepsilon)>0$, для которого $\frac{\varphi(x+0)-\varphi(x-0)}{\varphi(x)}<\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\,(x>X(\varepsilon))$. Пусть $x_k'>x_k>X(\varepsilon)\,(k>K)$ такие, что $0\leqslant\frac{\varphi(x_k')-\varphi(x_k)}{\varphi(x_k)}-\frac{\varphi(x_k+0)-\varphi(x_k)}{\varphi(x_k)}<\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}$. Тогда $0\leqslant\frac{\varphi(x_k')-\varphi(x_k)}{\varphi(x_k)}<\frac{\varepsilon}{\lambda_1}\,(k>K)$ и, значит, $\frac{\lambda_1-\delta}{2}\leqslant\frac{\varphi(x_k')}{\varphi(\alpha_k)}-\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}=\frac{\varphi(x_k')-\varphi(x_k)}{\varphi(x_k)}\ \frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}<\varepsilon$ для всех $k>K$. Отсюда получаем противоречие: $\frac{\lambda_1-\delta}{2}<\varepsilon=\frac{\lambda_1-\delta}{4}$.

Итак, для всех достаточно больших k $\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}\geqslant\lambda_2>1$, а потому $\alpha_k<x_k\leqslant\beta_k$. Пусть $\lambda_1<\lambda'<\lambda$ и $x_k''\in(\alpha_k,\ x_k)$ такие, что $0\leqslant$

$$\leqslant\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_k'')}{\varphi(x_k)}-\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_k-0)}{\varphi(x_k)}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda'}\right)\quad \text{и}\quad 0\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_k-0)}{\varphi(x_k)}\leqslant\frac{\varphi(x_k+0)-\varphi(x_k-0)}{\varphi(x_k)}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda'}\right)(k>K).$$

Тогда $\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_k'')}{\varphi(x_k)}<1-\frac{\lambda_1}{\lambda'}\,(k>K)$ и

$$1<\lambda_2\leqslant\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}=\frac{\varphi(x_k'')}{\varphi(\alpha_k)}\left(1-\frac{\varphi(x_k)-\varphi(x_k'')}{\varphi(x_k)}\right)^{-1}<\lambda_1\left(1-1+\frac{\lambda_1}{\lambda'}\right)=\lambda'. \tag{12}$$

Покажем, что

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\varphi(\beta_k)}{\varphi(x_k)}>1. \tag{13}$$

Допустим противное. Тогда можно считать $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\varphi(\beta_k)}{\varphi(x_k)}=1$. Отсюда, учитывая (12), имеем $\lambda\leqslant\frac{\varphi(\beta_k)}{\varphi(\alpha_k)}=\frac{\varphi(\beta_k)}{\varphi(x_k)}\ \frac{\varphi(x_k)}{\varphi(\alpha_k)}<$ $<\lambda'\,\frac{\varphi(\beta_k)}{\varphi(x_k)}\to\lambda'<\lambda\,(k\to\infty)$. Полученное противоречие доказывает (13).

Итак, мы показали: если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям пункта 5, то всякое $(R_1,\ \varphi)$-множество некоторой функции $f(t)$ является и $(R_p,\ \varphi)$-множеством этой функции для любого $p=2,\ 3,\ \ldots$. Учитывая это, получаем справедливость теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям пункта 5. Тогда утверждения теоремы 1 останутся справедливыми, если в ней все символы* (R_p, φ) *и* (R_{p-1}, φ) *заменить на символ* (R_1, φ).

6. Пусть функция $\varphi(x)$, кроме условий пункта 1, удовлетворяет еще и условию непрерывности на промежутке $[0, +\infty)$. Обозначим

$$F_0(x) = f(x), \quad F_p(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^x F_{p-1}(t)\, d\varphi(t) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Если $\lim\limits_{x \to \infty} F_p(x) = S$, то будем говорить, что функция $f(x)$ суммируется (R, φ, p)-методом к числу S, и будем писать $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = S(R, \varphi, p)$; (R, φ, p)-метод суммирования является естественным обобщением методов Гельдера суммирования интегралов [5].

Методом математической индукции легко показать справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Утверждения теоремы 2 останутся справедливыми, если функцию* $F(x)$ *заменить функцией* $F_p(x)$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Непосредственным следствием теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 4. ((R, φ)*-свойство* (R, φ, p)*-методов*). *Если множество* G *является* (R_1, φ)*-множеством функции* $f(x)$ *и если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = S(R, \varphi, p)$, *то* $S \in G$. *Если же бесконечно удаленная точка является* (R_1, φ)*-точкой функции* $f(x)$, *то* $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} |F_p(x)| = +\infty$ *для любого* $p \geqslant 1$.

В качестве простых следствий из теоремы 4 вытекает целый ряд теорем тауберова типа для (R, φ, p)-методов суммирования. Мы здесь сформулируем лишь некоторые из них.

Теорема 5. *Пусть каждый частичный предел функции* $f(x)$ *в бесконечно удаленной точке* $+\infty$ *является* (R_1, φ)*-точкой этой функции. Тогда, если* $F_p(x) = O(1)\,(x \to \infty)$ *для какого-то* $p \geqslant 1$, *то* $f(x) = O(1)\,(x \to \infty)$. *Если же* $F_p(x) \to S\,(x \to \infty)$ *для какого-то* $p \geqslant 1$, *то* $f(x) \to S\,(x \to \infty)$.

Теорема 6. *Пусть* $\{x_k\}$ *— заданная возрастающая последовательность положительных чисел* $x_k \to +\infty\,(k \to \infty)$ *и* $f(t)$ *— действительная функция, удовлетворяющая условиям*
$\underline{\lim\limits_{k \to \infty}}(f(t) - f(x_k)) \geqslant -r_1\,(0 \leqslant r_1 < \infty)$, *когда* $1 \leqslant \frac{\varphi(t)}{\varphi(x_k)} \to 1\,(k \to \infty)$,
$\underline{\lim\limits_{k \to \infty}}(f(x_k) - f(t)) \geqslant -r_2\,(0 \leqslant r_2 < \infty)$, *когда* $1 \leqslant \frac{\varphi(x_k)}{\varphi(t)} \to 1\,(k \to \infty)$.
Если $F_p(x) = O(1)\,(x \to \infty)$ *при некотором* $p \geqslant 1$, *то* $f(x_k) = O(1)\,(k \to \infty)$. *Если* $F_p(x) \to S\,(x \to \infty)$ *при некотором* $p \geqslant 1$, *то* $S - r_2 \leqslant \underline{\lim\limits_{k \to \infty}} f(x_k) \leqslant \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} f(x_k) \leqslant S + r_1$.

Из теорем 4—6 вытекают известные теоремы тауберова типа для методов Чезаро, доказанные Н. А. Давыдовым [1—4]. Последние в свою очередь являются обобщением классических тауберовых теорем Харди, Ландау, Шмидта и других [5].

Список литературы: **1.** *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. — Мат. сб., 1956, 38 (80), с. 509—524. **2.** *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве одного класса интегралов Стильтьеса. — Мат. сб., 1959, 48 (90), с. 429—446. **3.** *Давыдов Н. А.* (c)-Свойство методов Чезаро и Абеля-Пуассона и теоремы тауберова типа. — Мат. сб., 1963, 60 (102), с. 185-206. **4.** *Давыдов Н. А.* Тауберовы теоремы для методов Чезаро суммирования интегралов Лебега. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1966, вып. 2, с. 108-115. **5.** *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Изд-во иностр. лит., 1951.—504 с.

Поступила 19 марта 1976 г.