УДК 517.51

Б. Д. КОТЛЯР

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ И ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Пусть $f \in \widetilde{\Lambda}_{k,\alpha}$ — классу периодических с периодом 2π функций, k-я производная которых удовлетворяет условию Гельдера порядка α, $0<\alpha\leqslant 1$. Для коэффициентов Фурье c_n функции f по тригонометрической системе хорошо изгестен точный порядок убывания: $c_n = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right)$. Простые примеры [1] показывают, что этого порядка недостаточно для принадлежности функции f классу $\widetilde{\Lambda}_{k,\alpha}$. Для того чтобы функция входила в соответствующий класс, на ее коэффициенты Фурье необходимо наложить гораздо более жесткие условия (см., например, [2], а также [3, гл. II]). В работе [4] установлено, что такое положение не случайно — множество тех значений $n \in \boldsymbol{N}$, для которых достигается точный порядок убывания коэффициентов Фурье c_n функции $f \in \widetilde{\Lambda}_{k,\alpha}$, имеет логарифмическую плотность, равную 0. Ниже приводится усиление этого результата, оказывается, что логарифмическую плотность в этом утверждении можно заменить на асимптотическую (относительно всех этих понятий см. [5, гл. III]). Напомним, что асимптотической плотностью множества $L \subset N$ называется предел (если он существует):

$$\operatorname{mes} L = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in L}} 1. \tag{1}$$

Логарифмической плотностью множества $L \subset N$ называется предел (если он существует):

$$\operatorname{mes}_* L = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in L}} \frac{1}{n}\ ; \tag{2}$$

($\operatorname{mes} L$ и $\operatorname{mes}_* L$ являются конечно-аддитивными функциями множества; существование асимптотической плотности влечет существование логарифмической плотности и равенство соответствующих псевдомер [5]).

Помимо упомянутых псевдомер часто применяются (счетно-аддитивные) меры [5]:

$$\operatorname{mes}_\sigma L = \frac{1}{\zeta(\sigma)} \sum_{n \in} \frac{1}{n^\sigma}, \quad \sigma > 1;$$

здесь $\zeta(z)$ означает ζ-функцию Римана.

Приведем типичный результат (вытекает из следствия 1): пусть $f \in \tilde{\Lambda}_{k,\alpha}$, $c > 0$:

$$M \equiv M(f;\ c, k, \alpha) = \left\{ n \in N \,|\, |c_n| \geqslant \frac{c}{n^{k+\alpha}} \right\}; \tag{3}$$

тогда $\operatorname{mes} M = 0$.

Ниже рассматриваются вопросы о скорости сходимости к 0 допредельных выражений в (1), (2) для множества M и других подобных множеств, а также об оценке $\operatorname{mes}_\sigma M$.

Наряду с рассмотренными плотностями множеств натуральных чисел чрезвычайно полезной оказывается плотность по Шнирельману $d(L)$ [6] (см. также [7]), которая определяется следующим образом: пусть $L \subset N$, тогда $d(L) = \inf\limits_{N \in N} \frac{1}{N} \sum\limits_{\substack{n \leqslant N \\ n \in L}} 1$.

Суммой L множеств $L_1, \ldots, L_k$ называется множество, полученное следующим образом:

$$L \equiv \sum_{j=1}^{k} L_j = \left\{ n \in N \,|\, n = \sum_{j=1}^{k} n_j,\ n_j \in \{0\} \cup L_j,\ j = 1, \ldots, k \right\}.$$

Множество L называется базисом (натурального ряда) l-го порядка, если $L + \cdots + L = N$ (в сумме слева стоит l слагаемых).

Известно [6], что если $d(L) > 0$, то L — базис натурального ряда; многие задачи аддитивной теории чисел сводятся к вопросу, является ли базисом некоторое множество $L \subset \mathbf{N}$, для которого $d(L) = 0$. Ниже рассматривается вопрос о том, могут ли множества типа M (см. (3)) содержать базисы определенного порядка. Иногда желательно рассматривать «базисы натурального ряда для достаточно больших $N \in \mathbf{N}$»; множество L называется таким базисом (l-го порядка), если сумма $L + \cdots + L \equiv \sum_{j=1}^{l} L$ содержит все натуральные числа, начиная с некоторого. Аналогично определяется базис l-го порядка любого множества $A \subset \mathbf{N}$: множество $L \subset \mathbf{N}$ является таким базисом, если $\sum_{j=1}^{l} L \supset A$.

2. Формулировки и обсуждение результатов.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \tilde{\Lambda}_{k,\alpha}$ *и* $0 < \beta < k + \alpha + \frac{1}{2}$; *пусть* c_n — *коэффициенты Фурье функции* f *по тригонометрической системе,* $c > 0$ *и* $M \equiv M(f;c,\beta) = \left\{n \in \mathbf{N} \,\middle|\, |c_n| \geqslant \frac{c}{n^{\beta}}\right\}$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n \in M, \\ n \leqslant N}} 1 = O\left(N^{\varepsilon + \frac{\beta}{k+\alpha+\frac{1}{2}} - 1}\right).$$

Отсюда вытекает

Следствие 1. В условиях теоремы 1 $\operatorname{mes} M = 0$.

Отметим, что при $\beta = k + \alpha$ получается результат, сформулированный в п. 1. Естественно возникает вопрос о мощности множества M. Конечно, если $0 < \beta < k + \alpha$, то неравенство $c_n \geqslant c/n^{\beta}$ выполняется лишь для конечного множества номеров $n \in \mathbf{N}$. Легко, однако, показать, что неравенство $|c_n| \geqslant c/n^{k+\alpha}$, где $c > 0$ и c_n — коэффициенты Фурье функции $f \in \tilde{\Lambda}_{k,\alpha}$, может иметь бесконечное множество решений. В качестве примера можно взять функцию Вейерштрасса

$$f_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-k\alpha} \cos b^k x, \tag{4}$$

где $b > 1$ — целое число и $\alpha > 0$. При $0 < \alpha < 1$ $f_{\alpha} \in \tilde{\Lambda}_{0,\alpha}$ [1, гл.II], и для бесконечного множества номеров n справедливо равенство $a_n = n^{-\alpha}$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1*

$$\frac{1}{\ln N} \sum_{\substack{n \in M, \\ n \leqslant N}} \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\ln N}\right).$$

Из теоремы 2 (а также из следствия 1) вытекает

Следствие 2 (см. [4]). В условиях теоремы 1 $\mathrm{mes}_* M = 0$.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 при* $\varepsilon \to +0$ $\mathrm{mes}_{1+\varepsilon} M = O(\varepsilon)$.

Отметим, что из равенства O асимптотической плотности множества $L \subset \boldsymbol{N}$ немедленно следует равенство O плотности по Шнирельману $d(L)$ этого множества. Возникает вопрос, могут ли множества M такого типа, как в теореме 1, быть базисами натурального ряда. Приведем один из результатов, дающий частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 4. *Пусть функция* $f \in \Lambda_{0,\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2(l-1)}$, $l \in \boldsymbol{N}$, $l \geqslant 2$, b_n *— синус-коэффициенты Фурье* функции f; $A \subset \boldsymbol{N}$ *— множество положительной плотности по Шнирельману*, $c > 0$ *и*

$$R \equiv R(f;\ c,\ \alpha) = \left\{ n \in N \mid b_n > \frac{c}{n^\alpha} \right\}; \tag{5}$$

тогда R не содержит никакого базиса l-го порядка множества A. Множество R не содержит и базиса l-го порядка для достаточно больших натуральных чисел.

Утверждение теоремы остается справедливым, если в ее условии заменить синус-коэффициенты на косинус-коэффициенты.

Из приведенного утверждения и известной теоремы Шнирельмана [7, гл. 6] вытекает, что для $f \in \widetilde{\Lambda}_{0,\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, множество R не содержит множества простых чисел; в частности, при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ $g_\alpha \notin \widetilde{\Lambda}_{0,\alpha}$, если $g_\alpha(x) = \sum\limits_p p^{-\alpha} \sin px$, где p пробегает множество простых чисел (ср. с (4)).

Обозначим, как обычно, через $G(k)$, $k \in \boldsymbol{N}$, функцию Харди и Литтльвуда в проблеме Варинга, т. е. наименьшее натуральное число r, для которого все достаточно большие $N \in \boldsymbol{N}$ представимы в виде суммы $\sum\limits_{j=1}^{r} x_j^k$, $x_j \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$; из предыдущего вытекает, что для функции $f \in \widetilde{\Lambda}_{0,\alpha}$, $0 < \alpha < (2(G(k)-1))^{-1}$, множество R (5) не содержит последовательности $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$. Пользуясь верхними оценками для $G(k)$, полученными И. М. Виноградовым [8], можно в неравенстве для α заменить $G(k)$ на $\min\{k(3\ln k + 11),\ k(2\ln k + 4\ln\ln k + 2\ln\ln\ln k + 13)\}$.

3. Нам потребуется следующее простое утверждение.

***Лемма* 1.** *Пусть g — функция натурального аргумента, и для некоторого* $\sigma \in (0, 1)$ *при* $N \to +\infty$ *выполняется соотношение* $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{g(n)}{n^\sigma} = O(1)$; *тогда* $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} g(n) = O(N^{\sigma-1})$.

Доказательство леммы 1. Положим

$$\varphi(n) = \frac{1-\sigma}{n^{1-\sigma}} \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k^{\sigma}},$$

$$\psi(n) = (n+1)^{\sigma} - n^{\sigma} - \sigma n^{\sigma-1} \ (= O(n^{\sigma-2})).$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n^{\sigma} \frac{g(n)}{n^{\sigma}} = \frac{1}{N} \left(N^{\sigma} \sum_{n=1}^{N} \frac{g(n)}{n^{\sigma}} - \sum_{n=1}^{N-1} ((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma}) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k^{\sigma}} \right) = \frac{1}{N} \left(O(N^{\sigma}) - \sigma \sum_{n=1}^{N-1} \left(n^{\sigma-1} + \frac{\psi(n)}{\sigma} \cdot \frac{n^{1-\sigma}}{1-\sigma} \varphi(n) \right) \right) = O(N^{\sigma-1}).$$

Лемма доказана. Отметим, что для доказательства следствия 1 достаточно воспользоваться тем, что при любом $\sigma \in (0, 1)$ соотношение

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1-\sigma}{N^{1-\sigma}} \sum_{n=1}^{N} \frac{g(n)}{n^{\sigma}} = D$$

влечет существование предела

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(n) \ \ (= D)$$

(см. [9, п. 3.8, теорема 14]).

Доказательство теоремы 1. Сначала покажем, что при любом σ, удовлетворяющем неравенству

$$\beta \left(k + \alpha + \frac{1}{2} \right)^{-1} < \sigma < 1, \tag{6}$$

выполняется соотношение

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in M}} \frac{1}{n^{\sigma}} = O(1). \tag{7}$$

В [10, 4] показано, что если ядро $A(t, s)$ оператора Гильберта—Шмидта принадлежит $L^2(a, b; a, b)$ и имеет k-ю производную по переменной s, удовлетворяющую условию Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, то $A \in S_p$ при

$$p > \left(k + \alpha + \frac{1}{2} \right)^{-1}, \tag{8}$$

здесь S_p означает известный симметрично-нормированный идеал кольца ограниченных линейных операторов в $L^2(a, b)$ (см. [11, гл. III; 12, 13]), где приведенный результат получен при $k = 0$).

Полагая $A(t, s) = f(t - s)$ и учитывая, что собственные числа оператора A являются (с точностью до множителя) коэффициентами Фурье c_n функции f, а также то, что для собственных λ_n и сингулярных s_n чисел нормального оператора A при любом $p > 0$ выполняется равенство $\sum |\lambda_n|^p = \sum s_n^p$ (см. [11, гл. III]), получим $\sum |c_n|^p < +\infty$ при p, удовлетворяющем неравенству (8).

Положим $\varepsilon = \sigma - \beta\left(k + \alpha + \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Обозначив $p = (k + \alpha + {}$ ${} + \frac{1}{2}\Big)^{-1} + \varepsilon\beta^{-1}$, получим

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n \in M} n^{-\beta\left(k + \alpha + \frac{1}{2}\right)^{-1} - \varepsilon} = c^{-p} \sum_{n \in M} \left(\frac{c}{n^\beta}\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant c^{-p} \sum_{n \in M} |c_n|^p \leqslant c^{-p} \sum_{n \in N} |c_n|^p < +\infty. \tag{9}$$

Тем самым (7) доказано.

Положив $g(n) = \varkappa_M(n)$, где $\varkappa_A$ — индикаторная функция множества A, и применяя лемму 1, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in M}} 1 = O(N^{\sigma - 1}) = O\left(N^{\frac{\beta}{k + \alpha + \frac{1}{2}} - 1 + \varepsilon}\right). \tag{10}$$

Так как σ выбиралось лишь удовлетворяющим неравенствам (6), то (10) верно для каждого достаточно малого (а значит, и для любого) $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Положив в условии теоремы 1 $\varepsilon < 1 - \beta\left(k + \alpha + \frac{1}{2}\right)^{-1}$ и перейдя к пределу, получим требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 2. Из (7) и неравенства $\sigma < 1$ получаем

$$\sum_{\substack{n \in M \\ n \leqslant N}} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{\substack{n \in M \\ n \leqslant N}} \frac{1}{n^\sigma} = O(1),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3. Из (9) и неравенства $\sigma < 1$ получаем, что для любого $\delta > 0$

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n^{1+\delta}} \leqslant \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\sigma} < +\infty.$$

Учитывая, что ζ-функция Римана имеет простой полюс в точке $z=1$, получим

$$\operatorname{mes}_{1+\varepsilon} M = O\left(\frac{1}{\zeta(1+\varepsilon)}\right) = O(\varepsilon)$$

Доказательство теоремы 4. Проведем доказательство для синус-коэффициентов. Пусть $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, очевидно, что $g \in \tilde{\Lambda}_{0,\alpha}$, и поэтому $g^k \in \tilde{\Lambda}_{0,\alpha}$ при любом натуральном $k \leqslant l$. Положив $b_{-k} = -b_k$, получим, $g(x) \sim -\frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$.

Пусть $g^k(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{(k)} e^{inx}$. Предположим, что множество R содержит какой-нибудь базис B l-го порядка множества A положительной плотности по Шнирельману либо множества, содержащего все достаточно большие натуральные числа. Это означает, что для любого $n \in A$ найдется такое натуральное число $k \leqslant l$, что $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$, $n_j \in B \subset M$. Имеем (используя неравенство Коши)

$$|d_n^{(k)}| = \left|\left(-\frac{i}{2}\right)^k \sum_{m_1+\cdots+m_k=n} \prod_{j=1}^{k} b_{m_j}\right| \geqslant 2^{-k} \prod_{j=1}^{k} b_{n_j} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c^k}{2^k \prod_{j=1}^{k} n_j^{\alpha}} \geqslant \frac{c^k k^{\alpha k}}{2^k n^{k\alpha}} \geqslant \frac{D}{n^{\alpha l}},$$

где $D = \min_{1 \leqslant k \leqslant l} \left(\frac{ck^{\alpha}}{2}\right)^k$. Так как $\alpha < \frac{1}{2(l-1)}$, то $\alpha l < \alpha + \frac{1}{2}$. Из следствия 1 вытекает, что $\operatorname{mes} A = 0$, а значит, и $d(A) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему в случае $d(A) < 0$. Если множество содержит все натуральные числа, начиная с некоторого, то равенство $\operatorname{mes} A = 0$ также приводит к противоречию (асимптотическая плотность такого множества равна 1).

Список литературы: 1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965. Т. I.—616 с. 2. *Lorentz G. G.* Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen.-Math. Zeitschrift, 1948, **51**, S. 135-148. 3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.—936 с. 4. *Котляр Б. Д.* О сингулярных числах интегральных операторов. — Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 4, с. 794—796. 5. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.—416 с. 6. *Шнирельман Л. Г.* Об аддитивных свойствах чисел.—Изв. Донец. политехн. ин-та, 1930, т. 14, 2—3, с. 3—28. 7. *Гельфонд А. О., Линник Ю. В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел.—М.: Физматгиз, 1962.—272 с. 8. *Виноградов И. М.* Особые варианты метода тригонометрических сумм.—М.: Наука, 1976.—120 с. 9. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Изд-во иностр. лит., 1951.—504 с. 10. *Cochran J. A.* The nuclearity of operators generated by Hölder continuons kernels, Proc. Camb, Phil. Soc., 1974, 75, p. 351—356. **11.** *Гохберг И. Ц.*, *Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.—448 с. **12.** *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория.— М.: Мир, 1965.—1063 с. **13.** *Блюмин С. Л.*, *Котляр Б. Д.* Операторы Гильберта-Шмидта и абсолютная сходимость рядов Фурье. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, т. 34, № 1, с. 209—217.

Поступила 1 марта 1978 г.