УДК 517.53

А. С. КОЛОКОЛЬНИКОВ

О РАЗНОСТЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАССАМИ, РАЗДЕЛЕННЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию $w(x)$, представимую в виде

$$w(x) = u_1(x) - u_2(x), \tag{1}$$

где u_1, u_2 — субгармонические во всем пространстве $\mathbf{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ функции, гармонические в некоторой окрестности начала координат.

Пусть $m(r, u)$, $N(r, u)$, $T(r, u)$ — аналоги неванлинновских характеристик для функций вида (1). Обозначим через $E(x, r)$ и $S(x, r)$ соответственно шар и сферу в $\mathbf{R}^m$ радиуса r с центром в точке x. Пусть $\mathcal{Y}_p = \{Y_p^l\}$, $l = 1, \ldots, h$, $h = (2p + m - 2) \times (p + m - 3)!/((m-2)!\ p!)$, есть система линейно-независимых вещественных сферических функций степени p, ортонормальная на $S(0, 1)$. Положим $B_{p1}^l = \{x\colon Y_p^l > 0\}$, $B_{p2}^l = \{x\colon Y_p^l < 0\}$ и пусть D_{pj}^l — конусы, соответствующие областям B_{pj}^l, $j = 1, 2$, $l = 1, \ldots, h$.

В настоящей заметке изучается асимптотическое поведение функций вида (1), распределения масс μ_1 и μ_2 функций u_1 и u_2, которые удовлетворяют некоторым условиям.

Определение. *Если выполнены условия*

$$-\int\limits_{D^l_{p2}} \frac{Y^l_p d\mu_1}{|y|^{p+m-2}} + \int\limits_{D^l_{p1}} \frac{Y^l_p d\mu_2}{|y|^{p+m-2}} < \infty, \tag{2}$$

$l = 1, \ldots, h$, *то будем говорить, что у функции* $w(x)$ *вида* (1) *массы* $\mathcal{Y}_p$ — *разделены.*

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Если у функции* $w(x)$ *вида* (1) *массы* $\mathcal{Y}_p$ — *разделены, то существует предел* $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-p}\, T(r, w)$, *конечный или бесконечный.*

Теорема 2. *Пусть у функции* $w(x)$ *вида* (1) *массы* $\mathcal{Y}_p$ — *разделены. Тогда а) если* $0 < \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-p}\, T(r, w) < \infty$, *то* $\varkappa(w) = 0$; *б) если* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-p} T(r, w) = \infty$, *то* $\varkappa(w) \leqslant 2/(1+K)$, *где постоянная* $K = K(\mathcal{Y}_p) > 0$, а $\varkappa$ определено в [1].

Заметим, что аналогичные вопросы изучались [1] для функций вида (1), на распределения масс которых были наложены ограничения, носящие иной характер, чем условия (2). Доказательства теорем 1 и 2 проводятся в основном теми же методами, что и соответствующие утверждения работы [1]. Поэтому в целях краткости изложения мы лишь наметим те изменения в доказательствах, которые связаны с условиями (2) разделенности масс.

Для фиксированного вектора $\psi \in S(0, 1)$ имеет место формула [2]

$$C_p^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta) = \frac{C_{m-2}^{\frac{m-2}{2}}(1)}{h\sigma_1} \sum_{l=1}^{h} Y^l_p(\psi)\, Y^l_p(\xi),$$

где $C_p^{\frac{m-2}{2}}(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, — многочлен Гегенбауэра; θ — угол между векторами ψ и ξ, $\sigma_1 = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$. Запишем это равенство при $\psi = \xi$. Имеем

$$1 = K_0^2 \sum_{l=1}^{h} [Y^l_p(\psi)]^2, \tag{3}$$

где $K_0^2 = C_{m-2}^{\frac{m-2}{2}}(1)/\{C_p^{\frac{m-2}{2}}(1)\ \ h\sigma_1\}$. Отсюда непосредственно следует оценка

$$|Y^l_p(\psi)| \leqslant K_0^{-1}. \tag{4}$$

Важным моментом доказательства теоремы 1 является получение для показателей сходимости мер таких оценок: $\gamma_{\mu_j} \leqslant p$, $j = 1, 2$.

Следующий прием позволяет это проделать с помощью соотношений (3), (4). Имеем

$$\int\limits_{R^m} \frac{d\mu_j}{|y|^{p+m-2}} = K_0^2 \sum_{l=1}^{h} \int\limits_{R^m} \frac{[Y_p^l]^2 \, d\mu_j}{|y|^{p+m-2}} \leqslant K_0 \sum_{l=1}^{h} \int\limits_{R^m} \frac{|Y_p^l| \, d\mu_j}{|y|^{p+m-2}}, \quad j = 1,2.$$

Конечность интегралов в правой части этого неравенства устанавливается с помощью условий (2) по аналогии с [1].

При доказательстве теоремы 2 применяется следующий факт.

Лемма 1. *Если у функции $w(x)$ вида* (1) *массы $У_p$-разделены, то имеет место следующее неравенство:*

$$N(r, w) + N(r, -w) \leqslant \frac{K_0}{r^{m-1}\sigma_1} \sum_{l=1}^{h} \int\limits_{s(0,\, r)} w(y) \, Y_p^l \, d\sigma + O(r^p).$$

В заключение заметим, что лемма 1 доказывается исходя из определения величины $N(r, w)$ и соотношений (3), (4).

Автор благодарен В. С. Азарину и И. В. Островскому за полезное обсуждение полученных результатов.

Список литературы: **1.** *Колокольников А. С.* О росте субгармонических в пространстве функций со специальным распределением масс.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1974, вып. 21, с. 42—56. **2.** *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2.— М.: Наука, 1966.— 295 с.

Поступила 14 мая 1979 г.