УДК 517.944

Ю. В. КИРИЧЕНКО

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ В БЕСКОНЕЧНОМ БРУСЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Вопросам единственности и корректной разрешимости различных задач для систем линейных уравнений с частными производными в бесконечных областях посвящены многочисленные работы советских и зарубежных математиков. Полностью изучены эти вопросы по отношению к задаче Коши для эволюционной системы уравнений [1—4], а также по отношению и к краевой задаче в слое для таких систем [5—7].

Настоящая статья посвящена изучению смешанной задачи в брусе $[0, T_1] \times [0, T_2] \times R^m$ для систем вида

$$\frac{\partial^2 u (x, t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u (x, t_1, t_2), \tag{1}$$

где $P(s)$ — произвольная полиномиальная матрица, с нелокальным краевым условием

$$Au (x, 0, t_2) + Bu (x, T_1, t_2) = F_1 (x, t_2) \tag{2}$$

и начальным условием

$$u (x, t_1, 0) = F_2 (x, t_1). \tag{3}$$

Здесь A, B — матрицы, элементы которых комплексные числа, такие, что $\det \| A + B \| \neq 0$; $F_1 (x, t_2)$, $F_2 (x, t_1) \in C^n$ — вектор-функции, удовлетворяющие условию

$$AF (x, 0) + BF (x, T_1) = F_1 (x, 0). \tag{4}$$

Установлено, что по свойствам решений задача (1)—(3) значительно ближе к задаче Коши для линейной эволюционной системы, чем к краевой задаче. Так, классы единственности ее всегда состоят из функций, допускающих при $|x| \to \infty$ экспоненциальный рост выше первого порядка, в отличие от классов единственности решения краевой задачи. Этот порядок определяется вводимой в работе характеристикой, отличной, вообще говоря, от приведенного порядка системы (1), характеризующего классы единственности задачи Коши. С другой стороны, аналогично случаю краевой задачи, корректная разрешимость смешанной задачи (1)—(3) в классе ограниченных функций связана не только со свойствами матрицы $P(s)$, как в случае задачи Коши, но зависит также от матриц A и B в (2) (см. теорему 3).

Сначала рассмотрим вопрос о единственности решения задачи (1)—(3), считая, что $F_1(x, t_2) \equiv 0$; $F_2(x, t_1) \equiv 0$. Рассмотрим интегральный оператор R_s, зависящий от параметра $s \in C^m$ и действующий в $C[0, T_2]$:

$$R_s(f) = (A^* + B^*)^{-1} f(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s, t, \tau)(A^* + B^*)^{-1} f(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Здесь A^*, B^* — сопряженные к A и B соответственно;

$$K_1(s, t, \tau) = (A^* + B^*)^{-1} P^*(is) \left(\int_0^{t_1^0} I_0\left(2i\sqrt{P^*(is)(t_1^0 - \tau_1)(t-\tau)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times A^* d\tau + \int_{T_1}^{t_1^0} I_0\left(2i\sqrt{P^*(is)(t_1^0 - \tau_1)(t-\tau)}\right) B^* d\tau \right), \tag{6}$$

где $t_1^0 \in [0, T_1]$, $I_0(z)$ — Бесселева функция нулевого порядка $P^*(is)$ получается из $P(s)$ транспонированием и переходом к комплексно сопряженным коэффициентам у всех полиномов,

$$K_n(s, t, \tau) = \int_\tau^t K(s, t_1, \xi) K_{n-1}(s, \xi, \tau)\, d\xi \quad (n = 2, 3 \ldots). \tag{7}$$

На основании (6), (7) можно получить при любом $s \in C^m$ оценку

$$\| K_n(s, t, \tau) \| \leqslant C^n \| P^*(is) \|^n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \exp\{a T_1 \| P^*(is) \| (t-\tau)\}, \tag{8}$$

где C, a — постоянные ($a > 1$), и затем убедиться, что ряд (5) сходится, а также

$$p_2 = \varlimsup_{|s| \to \infty} \frac{\ln(\ln \| R_s \|_{C[0, T_2]}}{\ln |s|}. \tag{9}$$

Определение 1. *Приведенным порядком смешанной задачи (1)—(3) называется число* $p_1 = \max\left\{\frac{p_0}{2}, p_2\right\}$, *где* p_0 — *при-*

веденный порядок матрицы $P(s)$, *т. е. системы* $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} =$ $= P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$.

Теорема 1 (единственности). *Всякое решение задачи (1)—(4), удовлетворяющее условию:*

$$|u(x, t_1, t_2)| \leqslant A \exp \varphi(x), \tag{10}$$

где а) $\varphi(x) = a|x|^{p_1'}$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$, $a > 0$ *(при* $p_1 > 1$*); б)* $\varphi(x) = a|x|^{\alpha}$, α *любое* $a > 0$ *при* $p_1 = 1$*; в)* $\varphi(x)$ *— любая (при* $p_1 < 1$*) тождественно равно нулю.*

Доказательство теоремы 1 основано на аналоге принципа Гольмгрена, т. е. сводится к построению задачи, сопряженной с (1)—(3), и доказательству ее разрешимости в соответствующих классах функций. Сопряженная задача имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V_i(x, t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = P^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot V_i(x, t_1, t_2) \cdot V_i(x, t_1, T_2) = 0, \quad i = 1, 2;$$

$V_1(x, 0, t_2) = -A^*\varphi(x, t_2)$; $V_2(x, T_1, t_2) = B^*\varphi(x, t_2)$; $V_2(x, t_1^0, t_2) - V_1(x, t_1^0, t_2) = \psi_1(x)\psi_2(t_2)$. Здесь $t_1^0 \in [0, T_1]$; $V_i(x, t)$ $(i = 1, 2)$, $\varphi(x, t_2)$ неизвестные вектор-функции со значением в C^n и областью определения $t_2 \in [0, T_2]$, $x \in R^m$, $t_1 \in [0, t_1^0]$ для $V_1(x, t_1, t_2)$ и $t_1 \in [t_1^0, T_1]$ для $V_2(x, t_1, t_2)$; $\psi_1(x)$, $\psi_2(t_2)$ — известные векторная и скалярная функции. Ее решение может быть получено на основании метода преобразований Фурье и при использовании некоторой вспомогательной системы интегральных уравнений Вольтерра II рода.

Заметим, что приведенный порядок задачи (1)—(3) согласно (5)—(9) удовлетворяет неравенствам $\frac{p_0}{2} \leqslant p_1 \leqslant p$. Из теоремы 1 ясно, что класс единственности решений задачи (1)—(3) тем шире, чем меньше p_1. В некоторых случаях оценку p_1 сверху можно улучшить.

Теорема 2. *Пусть для любого* $s \in C^m$ *матрицы* A *и* B *перестановочны с* $P(is)$, *тогда* $p_1 \leqslant p_0$.

Заметим, что иногда осуществляется равенство $p_1 = \frac{p_0}{2}$, такова, например, задача Гурса [8] ($A \equiv E$, $B \equiv 0$). С другой стороны, в приведенном ниже примере $p_0/2 = 1$; $p_1 = p = 2$.

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = a \frac{\partial^2 u(x, t_1, t_2)}{\partial x^2}, \ a = \text{const}, \tag{11}$$

$$u(x, 0, t_2) = u(x, T_1, t_2), \ u(x, t_1, 0) = 0. \tag{12}$$

Можно показать, что в классе функций (10) с $\varphi(x) = a|x|^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ любое число, задача (11)—(12) имеет нетривиальное решение. Этот пример показывает, что существенное улучшение результата теоремы 1 невозможно.

Для описания класса корректно разрешимых задач (1)—(3) положим:

$$F_1(x, t_2) \equiv f_1(x) \cdot \eta_1(t_2); \; F_2(x, t_1) = f_2(x) \cdot \eta_2(t_1), \tag{13}$$

где $\eta_1(t_2)$, $\eta_2(t_1)$ — скалярные функции, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ — финитные вектор-функции.

Если применить к обеим частям равенств (1)—(3), (13) преобразование Фурье по x, то решение полученной задачи представимо в виде

$$y(s, t) = H_1(s, t) \cdot \tilde{f}_1(s) + H_2(s, t) \cdot \tilde{f}_2(s), \tag{14}$$

где $y(s, t)$, $\tilde{f}_1(s)$, $\tilde{f}_2(s)$ — преобразования Фурье функций $u(x, t)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$; $H_1(s, t)$, $H_2(s, t)$ — целые матрицы-функции переменной s.

Определение 2. *Корректными в смысле И. Г. Петровского будем называть смешанные задачи, удовлетворяющие условию. Условие А. Для любых непрерывных функций* $\eta_1(t_2)$, $\eta_2(t_1)$ *(см. (13)) матрицы-функции* $H_1(s, t)$, $H_2(s, t)$ *(они зависят от* $\eta_1(t_2)$ *и* $\eta_2(t_1)$*) удовлетворяют оценке:* $\|H_i(\sigma, t)\| \leqslant A(1+|\sigma|)^h$ $(i = 1, 2)$ *для некоторых* $h > 0$, $A > 0$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall \sigma \in R^m$.

Для корректных по И. Г. Петровскому задач (1) — (3) аналогично [4] вводятся понятия — показатель корректности — h и род задачи — μ, а также имеет место теорема.

Теорема 3 (корректности). *Корректная по И. Г. Петровскому задача (1) — (3), (13) имеет решение* $u(x, t_1, t_2)$, удовлетворяющее *в случае* $\mu > 0$ *оценке* $|u(x, t)| \leqslant C\exp\{b|x|^{p_3}\}$ $p_3 = \dfrac{p_1}{p_1 - \mu}$, *а в случае* $\mu \leqslant 0$ — оценке $|u(x, t)| \leqslant C(1+|x|)^l$, *если в (13) функции* $\eta_1(t_2)$ *и* $\eta_2(t_1)$ *непрерывны, а* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *удовлетворяют оценке* $|D_x^\alpha f_i(x)| < C_1 \varphi(x)$, $i = 1, 2$, $|\alpha| < k$, *где* k *достаточно велико, а* $\varphi(x) = \exp\{b'|x|^{p_3}\}$ $b' < b$ *при* $\mu > 0$ *и* $\varphi(x) = (1+|x|)^{h(l)}$, $h(l) \geqslant l$ *при* $\mu \leqslant 0$.

Доказательство теоремы 3 использует формулу (14), условие А и полностью аналогично доказательству соответствующих теорем [4, § 4 глава III].

Для каждой конкретной задачи вида (1) — (4) выполнение условия А в том виде, в котором оно записано, трудно проверить. Несколько облегчает проверку условия А следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть матрицы* A *и* B *перестановочны с матрицей* $P(i\sigma)$ $\forall \sigma \in R^m$ *и любое собственное значение* $\lambda(\sigma)$ *матрицы* $P(i\sigma)$ *при каждом* $\sigma \in R^m$ *принадлежит следующей области комплексной плоскости:*

$$|\operatorname{Im}\lambda(\sigma)| \leqslant \frac{1+\varepsilon}{4}\sqrt{|\operatorname{Re}\lambda(\sigma)|}\,(\operatorname{Ln}|\operatorname{Re}\lambda(\sigma)| + A_1), \; \operatorname{Re}\lambda \leqslant A_2,$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, A_1, A_2 *постоянных, тогда смешанная задача* (*1*) — (*4*) *удовлетворяет условию* A.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Я. И. Житомирскому за постановку задачи и ценные замечания.

Список литературы: **1.** *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций.— Бюл. МГУ, секция А, 1, 1938, вып. 7, с. 20—25. **2.** *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразование Фурье быстрорастущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, № 6, с.3—54. **3.** *Шилов Г. Е.* Об условии корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, № 4, с. 89—100. **4.** *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: 1958.— 274 с. **5.** *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Мат. сб., 1969, т. 79 (121), № 2, с. 293—304. **6.** *Борок В. М.* О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами.— Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1971, т. 35, № 4, с. 922—939. **7.** *Антыпко И. И., Перельман М. А.* О классах единственности решений нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1972, вып. 16, с. 98—109. **8.** *Avner Friedman.* The Cauchy Problem in Several Time Variables.— J. Math. and Mech., 1962, vol. 11, № 6, p. 859—889.

Поступила 22 октября 1979 г.