УДК 517.535

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

КОГДА L^2 ЕСТЬ ПРЯМАЯ СУММА H^2_- И uH^2_+?

Пусть $\boldsymbol{T}$ — единичная окружность, $\boldsymbol{U}$ — единичный круг, $dm(\zeta)$ — нормированная мера Лебега на $\boldsymbol{T}$, $u(\zeta)$ — функция на $\boldsymbol{T}$, равная по модулю единице dm почти всюду. Обсуждается вопрос о том, когда подпространства H^2_- и uH^2_+ в прямой сумме дают L^2. Метод рассуждений заимствован у Хелсона и Сегё [1].

Теорема 1. *Для того чтобы* $L^2 = H^2_- \dot{+} uH^2_+$, *необходимо и достаточно, чтобы* $u(\zeta)$ *представлялась в виде*

$$u(\zeta) = e^{i(\mu(\zeta)+\nu(\zeta))}, \tag{1}$$

где

$$\sup_{\zeta} |\tilde{\mu}(\zeta)| < \infty, \ |\nu(\zeta)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{\mu}$ — *функция, сопряженная к функции* μ; μ, ν *вещественны,* $\delta > 0$ — *некоторое число.*

Следствие. *Если $u(\zeta)$ — непрерывная функция индекса ноль, то* $L^2 = H^2_- \dot{+} uH^2_+$.

В самом деле, в качестве μ можно взять любую гладкую функцию на окружности такую, что $|\arg u(\zeta) - \mu(\zeta)| \leqslant \pi/2 - \delta$ при некотором $\delta > 0$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $L^2 = H^2_- \dot{+} uH^2_+$. Тогда угол между подпространствами H^2_- и uH^2_+ ненулевой, и значит, при некотором $\varepsilon > 0$ для любых $f \in H^2_+$, $g \in H^2_-$ выполняется $\left|\int\limits_T f(\zeta) \cdot \overline{g(\zeta)}\, u(\zeta)\, dm(\zeta) \leqslant (1-\varepsilon) \cdot \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}\right.$. Пусть h — любая функция из $H^1_{+,0} = \zeta H^1_+$. По известной факторизационной теореме, $h = f \cdot \overline{g}$, где $f \in H^1_+$, $g \in H^1_-$, $|f(\zeta)| = |g(\zeta)| = \sqrt{|h(\zeta)|}$. Таким образом, для любой $h \in H^1_{+,0}$ выполняется $|\int\limits_T h(\zeta)\, u(\zeta)\, dm(\zeta)| \leqslant$

$\leqslant (1-\varepsilon) \int\limits_T |h(\zeta)|\, dm(\zeta)$.

Из теоремы Хана — Банаха описания аннулятора подпространства $H^1_{+,0} \subset L^1$ следует, что существует $a(\zeta) \in H^\infty_+$ такая, что $|u(\zeta) - a(\zeta)| \leqslant (1-\varepsilon)\ (\zeta \in \boldsymbol{T})$, или $|1 - \overline{u(\zeta)}\, a(\zeta)| \leqslant 1 - \varepsilon$. Отсюда следует, что $\varepsilon < |a(\zeta)| < 2 + \varepsilon\ (\zeta \in \boldsymbol{T})$ и существует функция $\nu(\zeta)$, $|\nu| \leqslant \pi/2 - \delta\ (\delta = \arcsin \varepsilon)$ такая, что $\overline{u}(\zeta)\, a(\zeta) = |a(\zeta)| \exp\{i\nu(\zeta)\}$. Функцию a можно представить в виде $a(\zeta) = I(\zeta)\, \Phi^2(\zeta)$, где I — внутренняя функция, Φ, $\Phi^{-1} \in H^\infty_+$. Пусть Ψ — такая внешняя функция в $\boldsymbol{U}$, что $\arg \Psi(\zeta) = -1/2\nu(\zeta)$. Из $|\arg \Psi(\zeta)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\zeta \in \boldsymbol{U})$ следует, что Ψ, $\Psi^{-1} \in H^2_+$. Таким образом, $u(\zeta) = I(\zeta) \times E(\zeta)\, \overline{E(\zeta)}^{-1}$, где $E(\zeta) = \Phi(\zeta)\, \Psi(\zeta)$. Покажем, что I — константа. Так как $L^2 = H^2_- \dot{+} uH^2_+$, то и $L^2 = (H^2_-)^\perp \dot{+} (uH^2_+)^\perp$ ($\perp$ — значок ортогонального дополнения), и так как умножение на u — унитарный оператор в L^2, то $L^2 = H^2_- \dot{+} \overline{u}H^2_+$. По доказанному, $\overline{u}(\zeta) = J(\zeta)\, G(\zeta)\, \overline{G(\zeta)}^{-1}$, где J — некоторая внутренняя функция, G, $G^{-1} \in H^2_+$. Таким образом $I \cdot J \cdot E \cdot G = \overline{E} \cdot \overline{G}\ (\zeta \in \boldsymbol{T})$, откуда следует, что I — константа (за счет нормировки можно считать, что $I = 1$). Следовательно,

$$u(\zeta) = E(\zeta)\, \overline{E(\zeta)}^{-1}\ (\zeta \in \boldsymbol{T}), \tag{3}$$

где

$$E(\zeta) = \Phi(\zeta)\, \Psi(\zeta), \tag{4}$$

Φ, $\Phi^{-1} \in H^\infty_+$, $|\arg \Psi(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$, т. е. для u выполняется (1) — (2) с $\mu(\zeta) = 2 \arg \Phi(\zeta) = 2 \lim\limits_{r \to 1-0} \Phi(r\zeta)$. Пусть, наоборот, для u выполняется (1) — (2). Тогда u представима в виде (3) — (4). Покажем, что $L^2 = H^2_- \dot{+} uH^2_+$. Из E, $E^{-1} \in H^2_+$ следует, что

$H^2_- \cap uH^2_+ = 0$ и $(H^2_-)^\perp \cap (uH^2_+)^\perp = H^2_+ \cap uH^2_- = 0$. Поэтому сумма H^2_- и uH^2_+ — прямая и является плотным в L^2 линейным многообразием. Покажем, что эта сумма — все L^2. С этой целью построим косой проектор $\boldsymbol{\Pi}$ в L^2 на uH^2_+ параллельно H^2_-. Этот проектор зададим формулой $\boldsymbol{\Pi} f = \overline{E}^{-1}\cdot \boldsymbol{P}_+(\overline{E}f)$, где $\boldsymbol{P}_+$ — ортопроектор в L^2 на H^2_+. В самом деле, если f принадлежит плотному в H^2_- множеству H^∞_-, то $\boldsymbol{\Pi} f = 0$; если f принадлежит плотному в uH^2_+ множеству uH^∞_+, то $\Pi f = f$. Покажем, что $\boldsymbol{\Pi}$ — ограниченный оператор в L^2. Так как Φ, Φ^{-1} ограничены на $\boldsymbol{T}$, то оператор $\boldsymbol{\Pi}$ будет ограниченным, если для каждого тригонометрического полинома T, $T(\zeta) = \sum\limits_n t_n \zeta^n$ и сопряженного к нему полинома $\widetilde{T}(\zeta) = \sum\limits_n i(\operatorname{sign} n)\, t_n \zeta^n$ будет выполняться неравенство $\int\limits_{\boldsymbol{T}} |\widetilde{T}(\zeta)|^2 |P(\zeta)|\, dm(\zeta) \leqslant C(\delta)\cdot \int\limits_{\boldsymbol{T}} |T(\zeta)|^2 |P(\zeta)|\, dm$, где $P(\zeta) = \Psi^{-2}(\zeta)$. Покажем, что последнее неравенство выполняется для любого тригонометрического полинома T и любой аналитической в $\boldsymbol{U}$ функции P такой, что $|\arg P(\zeta)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$. Можно считать, что $t_0 = 0$ и T — вещественный. Функция $[T(\zeta) + i\widetilde{T}(\zeta)]^2 \times P(\zeta)\ (\zeta \in \boldsymbol{U})$ принадлежит H^1_+, обращается в нуль при $\zeta = 0$. Поэтому $\int\limits_{\boldsymbol{T}} [T(\zeta) + i\widetilde{T}(\zeta)]^2 P(\zeta)\, dm(\zeta) = 0$. Возводя в квадрат и пользуясь неравенством Коши — Буняковского, получаем $\left|\int\limits_{\boldsymbol{T}} \widetilde{T}^2(\zeta) P(\zeta)\, dm(\zeta)\right| \leqslant \int\limits_{\boldsymbol{T}} T^2(\zeta)\cdot |P(\zeta)|\, dm(\zeta) + \sin\delta/2 \int\limits_{\boldsymbol{T}} \widetilde{T}^2(\zeta) \times |P(\zeta)|\, dm(\zeta) + 2/\sin\delta \int\limits_{\boldsymbol{T}} T^2(\zeta)\, |P(\zeta)|\, dm(\zeta)$. Но $\left|\int\limits_{\boldsymbol{T}} \widetilde{T}^2(\zeta) P(\zeta)\, dm \times (\zeta)\right| \geqslant \int\limits_{\boldsymbol{T}} \widetilde{T}^2(\zeta) \operatorname{Re} P(\zeta)\, dm(\zeta) \geqslant \sin\delta \int\limits_{\boldsymbol{T}} \widetilde{T}^2(\zeta)\, |P(\zeta)|\, dm(\zeta)$. Отсюда и вытекает требуемое неравенство с $C(\delta) = 8\sin^{-2}\delta$. Теорема 1 доказана.

Воспользовавшись теоремой Ханта — Макенхоупта — Видена [2] об ограниченности оператора Гильберта в L^2 с весом, можно сформулировать иной критерий того, что $L^2 = H^2_- \dotplus uH^2_+$.

Теорема 2. *Для того чтобы* $L^2 = H^2_- \dotplus uH^2_+$ $(|u(\zeta)| = 1, \zeta \in T)$, *необходимо и достаточно, чтобы* u *представлялась в виде* $u(\zeta) = E(\zeta)\cdot \overline{E(\zeta)}^{-1}$, *где* E — *внешняя функция в* $\boldsymbol{U}$, *удовлетворяющая условию*

$$\sup_{\Delta} \left\{ |\Delta|^{-1} \int\limits_{\Delta} |E(\zeta)|^2\, dm(\zeta) \right\} \left\{ |\Delta|^{-1} \int\limits_{\Delta} |E(\zeta)|^{-2}\, dm(\zeta) \right\} < \infty, \tag{5}$$

sup *берется по всем интервалам* $\Delta \subset \boldsymbol{T}$.

Замечание. Если функция $u(\zeta)$ представима в виде (3), где E, $E^{-1} \in H^2_+$, и если u допускает еще одно представление в виде $u = F\bar{F}^{-1}$, где хотя бы одна из функций F, F^{-1} принадлежит H^2_+, то $F = cE$, где c — константа. Таким образом, если $u = E\bar{E}^{-1}$, где E внешняя, $E \in H^2_+$ (или $E^{-1} \in H^2_+$), но для E не выполняется условие (5), то L^2 не есть прямая сумма H^2_- и uH^2_+.

Нерешенный вопрос. Пусть B_1 и B_2 — произведение Бляшке в $\boldsymbol{U}$, $u(\zeta) = B_1(\zeta) B_2^{-1}(\zeta)$. Дать критерий того, что $L^2 = H^2_- \dotplus uH^2_+$ в терминах нулей B. Известные автору доста точные условия далеки от необходимых.

Список литературы: 1. *Helson H., Szegö G.* A Problem in Prediction Theory.— Ann. Math, Pura ed Appl., 1960, vol. 51, p. 107—138. 2. *Hunt R., Muckenhoupt B., Weeden R.* Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transforms.— Trans. Amer. Math. Soc, 1973, vol. 176, p. 227—251.

Поступила 29 октября 1979 г.