УДК 517.9

В. И. ХРАБУСТОВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНАЯ МАТРИЦА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ВЕСОМ НА ОСИ

В работе строится формула для спектральной матрицы периодической симметрической дифференциальной системы с неотрицательным матричным весом, который может вырождаться (даже тождественно). Как следствие получается формула для спектральной матрицы самосопряженного дифференциального оператора произвольного порядка с периодическими матричными коэффициентами на оси, которая в случае скалярного уравнения Хилла переходит в известный результат.

1. Рассматривается система

$$\frac{i}{2}\left(\frac{d}{dt}(Q(t)\,x)+Q(t)\frac{dx}{dt}\right)=(H_0(t)+\lambda H_1(t))\,x\ (t\in R^1), \tag{1}$$

где $n\times n$ — матрицы $H_j(t)=H_j^*(t)\in L^1_{\rm loc}\,(j=0,\ 1)$, $Q(t)=Q^*(t)\in\in {\rm AC_{loc}}$, $\det Q(t)\neq 0$. Всюду предполагается, что коэффициент $H_1(t)\geqslant 0$ является весом положительного типа, т. е. существует такой интервал $\Delta\subset R^1$, что

$$\int_\Delta X^*(t,\ \lambda)\,H_1(t)\,X(t,\ \lambda)\,dt>0, \tag{2}$$

где $X(t, \lambda) \underset{\text{def}}{—}$ такое матричное решение (1), что $X(0, \lambda) = \| \delta_{jk} \|_{j, k=1}^{n} = 1_n$.

Скалярное произведение в E^n обозначаем $y^* x = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$, а евклидову норму векторов и операторную матриц — $|\cdot|$. Если $\sigma(t)$ — неубывающая $n \times n$ — матрица-функция на оси, то $L_n^2(R^1, d\sigma)$ — гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением $\int y^*(t)\, d\sigma(t)\, x(t)$; *) $L_n^2(R^1, \tau dt)$ — его частный случай при $\sigma \in AC_{loc}$, $d\sigma = \tau(t)\, dt$.

Для удобства изложения сформулируем в виде теоремы по сути дела известные факты, связанные с разложением по собственным функциям системы (1).

Теорема 1 (ср. [1—4]). *При невещественных λ существует аналитическая матрица-функция $M(\lambda)$ (характеристическая матрица системы (1)), обладающая следующими свойствами;*

1°.
$$(\operatorname{Im} \lambda) \operatorname{Im} M(\lambda) \geqslant 0 \ (\operatorname{Im} \lambda \neq 0), \tag{3}$$

2°.
$$K^*(s, t, \bar{\lambda}) = K(t, s, \lambda) \overset{\text{def}}{=} X(t, \lambda)\{M(\lambda) - -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t-s)\, Q^{-1}(0)\}\, X^*(s, \bar{\lambda}) \ (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{4}$$

3°.
$$\int K(t, s, \lambda)\, H_1(s)\, K^*(t, s, \lambda)\, ds \leqslant (\operatorname{Im} \lambda)^{-1} \operatorname{Im} K(t, t, \lambda) \ (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{5}$$

4°.
$$y(t, \lambda) = \int K(t, s, \lambda)\, H_1(s)\, f(s)\, ds \ (\operatorname{Im} \lambda \neq 0), \tag{6}$$

где $f \in L_n^2(R^1, H_1 dt)$, удовлетворяет уравнению

$$l[y] \equiv \frac{i}{2}\left(\frac{d}{dt}(Qy) + Q\frac{dy}{dt}\right) - H_0 y = \lambda H_1 y + H_1 f \tag{7}$$

и оценке

$$\left\{\int y^* H_1 y\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}\left\{\int f^* H_1 f\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

*5°. Для таких финитных $g(t) \in AC_{loc}$, что** $\widehat{H}_1^{-1} l[g] \in L_n^2(R_1, H_1 dt)$, а если $H_1 > 0$ (п. в), то для любых $g(t) \in L_n^2(R^1, H_1 dt)$ справедливо равенство Парсеваля*

$$\int g^*(t)\, H_1(t)\, g(t)\, dt = \int \varphi^*(\lambda)\, d\sigma(\lambda)\, \varphi(\lambda),$$

где

$$\varphi(\lambda) = \int X^*(t, \lambda)\, H_1(t)\, g(t)\, dt, \tag{9}$$

---

* В интегралах по всей оси пределы интегрирования опускаем.

** Для $A = A^*$ обозначаем $\widehat{A} = A\big|_{E^n \ominus \operatorname{Ker} A}$. Запись $\widehat{A}^{-1}(t)\, z(t)$ подразумевает, что $z \in E^n \ominus \operatorname{Ker} A$ (п. в).

интеграл (9) сходится в $L_n^2(R^1, d\sigma)$, $\sigma(\lambda)$ — *неубывающая матрица-функция (спектральная матрица системы (1)),*

$$\sigma(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Im} M(\lambda + i\varepsilon)\ d\lambda\ (\lambda \in R^1). \tag{10}$$

Замечание 1. Если при каком-нибудь невещественном λ_0

$$\forall \xi \in E^n \setminus \{0\} : \xi^* \int X^*(t, \lambda_0) H_1(t) X(t, \lambda_0)\, dt \xi = \infty, \tag{11}$$

то характеристическая матрица системы (1) единственна.

Действительно, в силу [2] (11) влечет H_1 — квадратичную неинтегрируемость на оси всех решений (1) при $\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}\lambda_0$. Поэтому при наличии $M_1(\lambda)$, $M_2(\lambda)$ со свойствами (5)—(8) равно нулю решение (1)

$$X(t, \lambda)(M_1(\lambda) - M_2(\lambda)) \int X^*(s, \bar\lambda) H_1(s) f(s)\, ds = 0\ (\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}\lambda_0)$$

для любой $f(s) \in L_n^2(R^1, H_1 ds)$. Полагая

$$f(s) = \begin{cases} X(s, \bar\lambda)\, \xi\ (\xi \in E^n) & \text{при } |s| < N \\ 0 & \text{при } |s| \geqslant N \end{cases}, \tag{12}$$

имеем для любых $N > 0$, $\xi \in E^n$:

$$(M_1(\lambda) - M_2(\lambda)) \int_{-N}^{N} X^*(t, \bar\lambda) H_1(t) X(t, \bar\lambda)\, dt \xi = 0\ (\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}\lambda_0),$$

откуда $M_1(\lambda) = M_2(\lambda)$ при $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ в силу (2), (4).

2. В этом n^0 рассматриваем периодическую систему (1) с

$$Q(t) = Q(t+1),\ H_j(t) = H_j(t+1)\ (j = 0,\ 1). \tag{13}$$

Матрица $X(1, \lambda)$ называется матрицей монодромии системы (1), (13), а ее собственные значения — мультипликаторами этой системы.

Замечание 2. Если для системы (1), (13) неравенство (2) выполнено для какого-нибудь интервала Δ, то оно выполнено для любого интервала длины $\varkappa$, где $\varkappa$ — степень минимального полинома матрицы $X(1, 0)$.

Действительно, если при некоторых $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$, $a \in R^1$

$$\exists f \in E^n \setminus \{0\} : f^* \int_a^{a+\varkappa} X^*(t, \lambda_0) H_1(t) X(t, \lambda_0)\, dt f = 0, \tag{14}$$

то существует такой вектор $g \in E^n$, что $X(t, \lambda_0) f = X(t, 0) g$ при $t \in [a, a+\varkappa]$. Так как в силу теоремы Флоке

$$\forall a \in R^1,\ k \in \boldsymbol{Z} : \int_{a+k}^{a+k+1} X^*(t, \lambda) A(t) X(t, \lambda)\, dt =$$

$$= X^{*k}(1, \lambda) \int_a^{a+1} X^*(t, \lambda) A(t) X(t, \lambda)\, dt X^k(1, \lambda) \tag{15}$$

для любой $n\times n$ — матрицы $A(t)=A(t+1)\in L^1_{\text{loc}}$, то при $k=\overline{0,\varkappa-1}$

$$\int\limits_a^{a+1} X^*(t,0)\,H_1(t)\,X(t,0)\,dt X^k(1,0)\,g=0 \tag{16}$$

в силу (14). Но тогда (16) выполнено при всех целых k, ибо $X^k(1,0)$ при любом $k\in\boldsymbol{Z}$ равна полиному от $X\ (1,\ 0)$ степени $\leqslant\varkappa-1$. С учетом (15) отсюда следует, что $H_1(t)\,X(t,0)\,g=0$ почти всюду на оси, а это противоречит (2). Даваемая замечанием 2 оценка длины Δ неулучшаема, как показывает

Пример 1. Известно, что если степень минимального полинома матрицы $X(1,0)$ равна $\varkappa$, то существует вектор η такой, что векторы $X^k(1,0)\,\eta\ (k=\overline{0,\varkappa-1})$ линейно независимы. Пусть P — ортопроектор на $E^n\ominus L$, где L — линейная оболочка векторов $X^k(1,\ 0)\,\eta\ (k=\overline{0,\ \varkappa-2})$; $P=1_n$, если $\varkappa=1$. При любом $\varepsilon\in(0,\ 1)$ рассмотрим систему

$$\frac{i}{2}\left(\frac{d}{dt}(Qx)+Q\frac{dx}{dt}\right)=(H_0+\lambda h_1)\,x, \tag{17}$$

где $h_1(t)=h_1(t+1)$,

$$h_1(t)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon\\ X^{*-1}(t,\ 0)\,PX^{-1}(t,\ 0) & \text{при } 1-\varepsilon<t<1\end{cases}$$

(при $\lambda=0$ (17) и (1), (13) совпадают). Учитывая (15), видим, что (2) для системы (17) выполнено, а $\int\limits_0^{\varkappa-\varepsilon} x^*h_1x\,dt=0$ для ее решения $x(t,\ \lambda)$, если $x(0,\ \lambda)=\eta$.

В силу замечания 2 и равенства

$$X^*(t,\ \lambda)\,Q(t)\,X(t,\ \lambda)-Q(0)=2\operatorname{Im}\lambda\int\limits_0^t X^*(s,\ \lambda)\,H_1(s)\,X(s,\ \lambda)\,ds, \tag{18}$$

$X^\varkappa(1,\ \lambda)$ является при $\pm\operatorname{Im}\lambda>0$ строгим $\mp Q(0)$-сжатием*. Поэтому (см. [5]) спектр $X(1,\ \lambda)$ не пересекается с единичной окружностью при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$.

Лемма 1. *Для системы (1), (13) выполнено (11) при любом $\lambda_0\in\boldsymbol{C}$ и ее характеристическая матрица равна*

$$M(\lambda)=\left(P(\lambda)-\frac{1}{2}1_n\right)\{iQ(0)\}^{-1}\quad(\operatorname{Im}\lambda\neq 0), \tag{19}$$

где

$$P(\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu|=1}(X(1,\ \lambda)-\mu 1_n)^{-1}d\mu.$$

---

* При этом $X^k(1,\ \lambda)$ может таковым не быть для всех натуральных $k<\varkappa$ и всех λ с $\pm\operatorname{Im}\lambda>0$ (см. систему (17)).

Доказательство. В силу теоремы Флоке и замечания 2 $\forall \xi \in E^n \setminus \{0\}: \xi^* \int X^*(t, \lambda_0) H_1(t) X(t, \lambda_0)\, dt \xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi^* X^{*k}(\varkappa, \lambda_0) \times$ $\times \int_0^{\varkappa} X^*(t, \lambda_0) H_1(t) X(t, \lambda_0)\, dt X^k(\varkappa, \lambda_0) \xi = \infty$, ибо для любой невырожденной матрицы A $\lim_{m\to\infty} \mu\left(\sum_{k=-m}^{m} A^{*k} A^k\right) = \infty$*. Равенство (11) при любом $\lambda_0 \in \boldsymbol{C}$ доказано. В силу (18) $y_N(t, \lambda) = y(t, \lambda)$ (6), (19), (12) удовлетворяет (7), (12). Для (4), (19) в силу теоремы Флоке справедлива при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ оценка: $|K(t, s, \lambda)| \leqslant c_1(\lambda) \times$ $\times \exp(-c_2(\lambda) |t - s|)$ $(c_2(\lambda) > 0)$. Поэтому $y_N \in L_n^2(R^1, H_1 dt)$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ и рассуждения, аналогичные использованным при проверке замечания 1, завершают доказательство леммы 1. Отметим, что для (19) в (3) имеет место строгое неравенство в силу (5) и замечания 2.

Согласно теореме Флоке $X(1, 0) = Z(t) \exp(\Gamma t)$, где $Z(t) =$ $= Z(t+1)$. Учитывая, что $\operatorname{Re}\{Q(0)\Gamma\} = 0$, $Z^*(t) Q(t) Z(t) = Q(0)$ в силу (18), видим, что справедливо

Замечание 3. Замена $x = Zy$ сводит (1), (13) к системе

$$iQ(0) \frac{dy}{dt} = (iQ(0)\Gamma + \lambda Z^*(t) H_1(t) Z(t))\, y. \tag{20}$$

Матрицы монодромии (1), (13) и (20) совпадают.

Замечание 3 позволяет автоматически распространить на (1), (13) результаты работы [6] (см. также [7]) об аналитических свойствах мультипликаторов периодических гамильтоновых систем положительного типа, если учесть, что (20) таковой является, ибо в силу (2) $\int_0^1 y^* Z^* H_1 Z y\, dt > 0$ для таких решений $y(t, \lambda) \not\equiv 0$ (20), что $y(1, \lambda) = \rho y(0, \lambda)$, $|\rho| = 1$.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ у (1), (13) есть унимодулярный (по модулю равный единице) мультипликатор ρ_0. Обозначим $\rho_j(\lambda)$ $(j = \overline{1, d})$ те ветви определяемой уравнением $D(\rho, \lambda) = \det(X(1, \lambda) - \rho 1_n) =$ $= 0$ многозначной функции $\rho(\lambda)$, для которых $\rho_j(\lambda_0) = \rho_0$. В силу [6, 7] и замечания 3 d равно геометрической кратности ρ_0,

$$\rho_j(\lambda) = \rho_0 + \sum_{l=1}^{\infty} c_{jl} (\lambda - \lambda_0)^{\frac{e}{q_j}} \quad (j = \overline{1, d}), \tag{21}$$

где $c_{j1} \neq 0$, q_j — порядки жордановых клеток, отвечающих ρ_0. При этом каждая функция $\rho_j(\lambda)$ является обратной к голоморфной в точке ρ_0 функции $\lambda_j(\rho)$, которой отвечает голоморфная в

* $\mu(B)$ — наименьшее собственное число матрицы $B = B^*$.

точке ρ_0 вектор-функция $x_j(\rho)$ такая, что $x_j(\rho_0)$ $(j=\overline{1,\ d})$ линейно независимы и $X(1,\ \lambda_j(\rho))\,x_j(\rho)=\rho x_j(\rho)$ в окрестности ρ_0.

Пусть $x_{jk}(\lambda)=x_j(\rho_{jk}(\lambda))$ $(k=\overline{1,\ q_j})$, где $\rho_{jk}(\lambda)$ получаются из $\rho_j(\lambda)$ (21) выбором в верхней полуплоскости q_j различных ветвей $\sqrt[q_j]{\lambda-\lambda_0}$. Если $|\lambda-\lambda_0|$ мал, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$, то разделенные разности $e_{j1}(\lambda)=x_{j1}$,

$$e_{jk}(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{k} x_{jl}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{k}(\rho_{jl}-\rho_{ji})^{-1} & (\lambda\neq\lambda_0);\\ \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0,\ \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0} e_{jk}=\dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^k}{d\rho^k}x_j(\rho)\Big|_{\rho=\rho_0} & (\lambda=\lambda_0)\end{cases}$$

$(k=\overline{2,\ q_j})$ функции $x_j(\rho)$ линейно независимы, ибо $X(1,\ \lambda)\,e_{j1}\times\times(\lambda)=\rho_{j1}(\lambda)\,e_{j1}(\lambda)$, $X(1,\ \lambda)\,e_{jk}(\lambda)=\rho_{jk}(\lambda)\,e_{jk}(\lambda)+e_{j\,k-1}(\lambda)$ $(k>>1)$. Пусть проекторы $P_{jk}(\lambda)$ $(k=\overline{1,\ q_j})$, действующие при $\lambda_0\neq\neq\lambda\to\lambda_0$, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ в линейной оболочке векторов $e_{j1},\ \ldots\ e_{jq_j}$ таковы, что $P_{jk}x_{jl}=\delta_{kl}x_{jl}$. Прямое вычисление $P_{jk}e_{jl}$ с учетом (21) и равенства $x_{jk}=e_{j1}+O(|\lambda-\lambda_0|^{\frac{1}{q_j}})$ при $\lambda\to\lambda_0$, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ показывает, что справедлива

Лемма 2. *Если $\lambda_0\neq\lambda\to\lambda_0$, $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$, то в базисе $e_{j1},\ \ldots\ e_{jq_j}$ матрица $P_{jk}=(\lambda-\lambda_0)^{\frac{1}{q_j}-1}\,\|r_{\alpha,\,\beta}\|_{\alpha,\,\beta=1}^{q_j}+O(|\lambda-\lambda_0|^{\frac{2}{q_j}-1})$, где выбрана ветвь $\sqrt[q_j]{\lambda-\lambda_0}$, отвечающая в (21) $\rho_{jk}(\lambda)$, $r_{1q_j}=q_j^{-1}c_{j1}^{1-q_j}$, остальные $r_{\alpha\beta}=0$.*

Используя [5, с. 274], из леммы 2 легко вывести с учетом (4).

Следствие 1. Если в (1), (13) $\lambda\to\lambda_0\in R^1$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, то для (19)

$$|M(\lambda)|=c\,|\lambda-\lambda_0|^{\frac{1}{p}-1}+o(|\lambda-\lambda_0|^{\frac{1}{p}-1}),\tag{22}$$

где $c=c(\lambda_0)>0$, $p=\max\{1,\ q\}$, q — максимальный из порядков жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам (1), (13) при $\lambda=\lambda_0$.

Множество T тех λ, при которых >1 порядки жордановых клеток, отвечающих унимодулярным мультипликаторам системы (1), (13), не имеет конечных предельных точек в силу (21). Ни один из мультипликаторов (1), (13) при $\lambda\in U=R^1\setminus T$ не сходит с единичной окружности и не садится на нее. Если интервал $I\subseteq U$, то унимодулярные при $\lambda\in I$ мультипликаторы являются аналитическими на I функциями. При сдвиге λ с вещественной оси в верхнюю полуплоскость часть из них (мультипликаторы I рода) сдвигается внутрь, а остальные (мультипликаторы II рода) — во внешность единичной окружности. Названные свойства мультипликаторов (1), (13) имеют место в силу [6, 7] и замечания 3.

Для тех $\lambda \in U$, при которых нет совпавших мультипликаторов разного рода, определим проекторы Рисса $P_+(\lambda)$ ($P_-(\lambda)$), отвечающие унимодулярным мультипликаторам I (II) рода:

$$P_{\pm}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_{\pm}(\lambda)} (X(1, \lambda) - \mu 1_n)^{-1} \, d\mu, \tag{23}$$

где замкнутый контур $\Gamma_+(\lambda)$ ($\Gamma_-(\lambda)$) выделяет из спектра $X(1, \lambda)$ мультипликаторы I (II) рода. $P_{\pm}(\lambda)$ при указанных λ явно выражаются через $X(1, \lambda)$ и соответствующие унимодулярные мультипликаторы. Например,

$$P_+(\lambda) = p_+(X(1, \lambda), \lambda), \tag{24}$$

где

$$p_+(\rho, \lambda) = \sum_{j=1}^{k_+} \frac{(\nu_j^+ - 1)! \, D(\rho, \lambda)}{(\rho - \rho_j^+)^{\nu_j^+} \left\{ \frac{\partial^{\nu_j^+}}{\partial \rho^{\nu_j^+}} D(\rho, \lambda) \Big|_{\rho = \rho_j^+} \right\}} \tag{25}$$

(при тех $\lambda \in U$, при которых у (1), (13) нет унимодулярных мультипликаторов I рода, $p_+(\rho, \lambda) \equiv 0$). В (25) $\rho_j^+ = \rho_j^+(\lambda)$ — мультипликаторы I рода, $k_+ = k_+(\lambda)$ — их суммарная алгебраическая кратность, $\nu_j^+ = \nu_j^+(\lambda)$ — количество мультипликаторов, равных в точке λ $\rho_j^+(\lambda)$. Те $\lambda \in U$, при которых у (1), (13) есть мультипликаторы смешанного рода, являются устранимыми особыми точками $P_{\pm}(\lambda)$, как легко видеть с учетом (22).

Теорема 2. *Спектральная матрица системы* (1), (13) $\sigma(\lambda) \in AC_{loc}$ *и при* $\lambda \in U = R^1 \setminus T$

$$d\sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi} (P_-(\lambda) - P_+(\lambda)) \, Q^{-1}(0) \, d\lambda. \tag{26}$$

Доказательство вытекает из (10), (4), (19), (22) и из равенств ($\lambda \in U$)

$$\lim_{\varepsilon \to +0} P(\lambda \pm i\varepsilon) = P_{\pm}(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu| = 1 - 0} (X(1, \lambda) - \mu 1_n)^{-1} \, d\mu.$$

Замечание 4. У системы (1), (13) с дефинитным коэффициентом $Q(t)$

$$d\sigma(\lambda) = \pm \frac{1}{2\pi} Q^{-1}(0) \, d\lambda. \tag{27}$$

Действительно, из (18) вытекает в силу [5, гл. 1], что $\operatorname{rg} P_-(\lambda) - \operatorname{rg} P_+(\lambda) =$ сигнатуре $Q(0)$ ($\lambda \in U$), откуда и следует (27).

Пример 2. При $n = 2$, обозначив матрицу монодромии

$$X(1, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1(\lambda) & x_2(\lambda) \\ x_3(\lambda) & x_4(\lambda) \end{pmatrix},$$

$\operatorname{sp} X(1, \lambda) = 2a(\lambda)$, $\det X(1, \lambda) = b(\lambda)$, получаем в силу (26), (24), что $d\sigma(\lambda) = 0$, если $|a| > 1$ и

$$d\sigma(\lambda) = \frac{1}{4\pi\sqrt{a^2 - b}} \begin{pmatrix} x_1 - x_4 & 2x_2 \\ 2x_3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} Q^{-1}(0)\, d\lambda, \tag{28}$$

если $|a| \leqslant 1$. Значения корня в (28) выбираются так, чтобы было: $d\sigma \geqslant 0$. В (28) Q индефинитна.

3. Рассмотрим периодическую симметрическую квазидифференциальную систему произвольного порядка $r > 1$ (случай $r = 1$ см. $n^\circ 2$):

$$\sum_{j=0}^{\alpha} \left(p_{2j} y^{(j)}\right)^{(j)} + i \sum_{j=0}^{\beta} \left(\left(p_{2j+1} y^{(j)}\right)^{(j+1)} + \left(p_{2j+1}^* y^{(j+1)}\right)^{(j)}\right) = \lambda W y \ (t \in R^1), \tag{29}$$

где $\alpha = \left[\frac{r}{2}\right]$, $\beta = \left[\frac{r-1}{2}\right]$, $m \times m$ — матрицы $p_\nu(t) = p_\nu(t+1)$, $p_{2j} = p_{2j}^*$, $\det p_r \operatorname{Re} p_r \neq 0$. Матричный вес $W(t) = W(t+1) \geqslant 0$ таков, что $\int\limits_\Delta y^* W y\, dt > 0$ для некоторого интервала $\Delta \subset R^1$ и любого решения $y(t, \lambda) \not\equiv 0$ (29). Локальные свойства p_ν, W обычны (см. [2]). Следуя [2], воспользуемся квазипроизводными $y^{[j]} = y^{(j)}$ $(j = \overline{0, \alpha - 1})$,

$$y^{[\alpha]} = \begin{cases} (-1)^\alpha \left(p_{2\alpha} y^{(\alpha)} + i p_{2\alpha-1} y^{(\alpha-1)}\right) & \text{при } \alpha > \beta \\ (-1)^{\alpha+1} i p_{2\alpha+1} y^{(\alpha)} & \text{при } \alpha = \beta, \end{cases}$$

$$y^{[\alpha+k+1]} = -\left(y^{[\alpha+k]}\right)' + (-1)^{\beta-k} \left(p_{2(\beta-k)} y^{(\beta-k)} + \right.$$
$$\left. + i \left(p_{2(\beta-k)+1}^* y^{(\beta-k+1)} + p_{2(\beta-k)-1} y^{(\beta-k-1)}\right)\right)$$

$(k = \overline{0, \beta}$, $p_{-1} \equiv 0)$. Если y — решение (29), то в силу [2] $x = \sum_{j=0}^{r-1} \oplus y^{[j]}$ удовлетворяет системе вида (1), (13) с $Q(t) = Q_r(t) = \| q_{jk} \|_{j,k=1}^r$, где $m \times m$ — блоки

$$q_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{при } j + k \neq r + 1, \\ 1_m i \operatorname{sgn}(k - j) & \text{при } j + k = r + 1,\ j \neq k, \\ (-1)^\alpha 2 \operatorname{Re} p_r^{-1} & \text{при } j + k = r + 1,\ j = k \end{cases}$$

и с весом $H_1(t) = \operatorname{diag}(W, 0, \ldots, 0)$ положительного типа. Множество T и проекторы $P_+(\lambda)$, $P_-(\lambda)$ (23), отвечающие ее матрице монодромии $X(1, \lambda) = \| Y_j^{[k-1]}(1, \lambda) \|_{j,k=1}^r$, где $Y_j(t, \lambda)$ — матричные решения (29) такие, что $\| Y_j^{[k-1]}(0, \lambda) \|_{j,k=1}^r = 1_{mr}$, обозначим соответственно T_r и $P_{+r}(\lambda)$, $P_{-r}(\lambda)$.

Так как область определения максимального симметрического линейного отношения плотна в области определения сопряженного (см., например, [8, теоремы 2.1; 3.19]), то в силу лемм 3, 4 из [3] и теоремы 6.2 из [8] при условии (11) в пункте 5° теоремы 1 вместо финитности g достаточно требовать, чтобы $g \in L_n^2(R^1, H_1 dt)$. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. Для таких $h(t) \in L_m^2(R^1, W\,dt)$, что $h^{[j]} \in \in AC_{loc}(j = \overline{0, r-1})$, $\widehat{W}^{-1}h^{[r]} \in L_m^2(R^1, W\,dt)$, а если $W > 0$ (п. в.), то для любых $h(t) \in L_m^2(R^1, W\,dt)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int h^*(t)\,W(t)\,h(t)\,dt = \int \varphi_r^*(\lambda)\,d\sigma_r(\lambda)\,\varphi_r(\lambda), \tag{30}$$

где

$$\varphi_r(\lambda) = \int \left(\sum_{j=1}^{r} \oplus Y_j^*(t, \lambda)\,W(t)\,h(t)\right) dt, \tag{31}$$

интеграл (31) сходится в $L_{mr}^2(R^1, d\sigma_r)$, $\sigma_r \in AC_{loc}$ и при $\lambda \in R^1 \setminus \setminus T_r\, d\sigma_r(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(P_{-r}(\lambda) - P_{+r}(\lambda))\,Q_r^{-1}(0)\,d\lambda$.

В случае скалярного уравнения Хилла $-y'' + py = \lambda y$, $p(t) = = p(t+1)$, $\operatorname{Im} p = 0\,(t \in R^1)$ (30) переходит в известную формулу из книги Э. Ч. Титчмарша [9, с. 360].

В заключение автор благодарит Ф. С. Рофе-Бекетова за внимание к работе.

Список литературы: 1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.—749 с. 2. *Kogan V. J., Rofe-Beketov F. S.* On square—integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1976, vol. 74 A, № 1, P. 5—40 (Имеется одноименный препринт на русском языке, ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1973). 3. *Брук В. М.* О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений. — Функцион. анализ, вып. 5. Ульяновск, 1975, с. 25—33. 4. *Брук В. М.* О линейных отношениях в пространстве вектор-функций. — Мат. заметки, 1978, т. 24, № 4, с. 499—511. 5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.—534 с. 6. *Крейн М. Г., Любарский Г. Я.* Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 4, с. 549—572. 7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.—718 с. 8. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Selfadjoint extensions of symmetric subspaces. — Pacific Journ. Math., 1974, vol. 54, № 1, p. 71—100. 9. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.:— Изд-во иностр. лит., 1961.—Т. 2.—555 с.

Поступила 29 октября 1979 г.