УДК 519.55

М. Б. ГОРОДЕЦКИЙ

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим оператор T, порожденный левой частью уравнения

$$\sum_{i\in z_+}\sum_{j\in z^n} a_{k-i,\, m-j}\varphi_{ij} + \sum_{i\in z_-}\sum_{j\in z^n} b_{k-i,\, m-j}\varphi_{ij} = f_{km},\ k\in z,\ m\in z^n$$

в классе последовательностей, быстро убывающих по выделенной переменной. Такие пространства последовательностей впервые появились в теории одномерных дискретных сверток в связи с вопросом корректной постановки задач для операторов с вырожденным символом [1]. Напомним [2, 3], что оператор T является обратимым в пространстве $l_p(z^{n+1})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$1)\ a(\eta,\xi) = \sum_{i\in z}\sum_{j\in z^n} a_{ij}\eta^i\xi^j \neq 0,\ \ b(\eta,\xi) = \sum_{i\in z}\sum_{j\in z^n} b_{ij}\eta^i\xi^j \neq 0;$$

$$2)\ \operatorname*{ind}_{\eta} a(\eta, 1) = \operatorname*{ind}_{\eta} b(\eta, 1).$$

Для рассматриваемого случая указанные условия, являясь достаточными, уже не являются необходимыми, и среди обратимых операторов есть операторы с аннулирующимися функциями $a(\eta, \xi)$ и $b(\eta, \xi)$. В связи с этим критерий обратимости оператора формулируется не в терминах поведения функций $a(\eta, \xi)$ и $b(\eta, \xi)$, а в терминах оценок для некоторой пары операторов, связанных с оператором T.

Пусть $l\{-\infty, 0\}$ — счетно-нормированное пространство последовательностей $\{\varphi_{ij}\}$ $i\in z$, $j\in z^n$, для которых $\sum_{i\in z}\sum_{j\in z^n}(|i|+1)^k|\varphi_{ij}|<\infty$, $k=0, 1, 2, \ldots$; Γ — единичная окружность на комплексной плоскости; W^n — банахова алгебра функций $\varphi(\xi)$ $(\xi\in\Gamma^n)$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье; $W\{-\infty, 0\}$ — счетно-нормированная алгебра функций $\varphi(\eta, \xi)$, коэффициенты Фурье которых принадлежат пространству $l\{-\infty, 0\}$. Очевидно, всякая функция $\varphi(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0\}$ может быть представлена в виде $\varphi(\eta, \xi) = \sum\limits_{i \in z} \varphi_i(\xi)\eta^i$, где $\varphi_i(\xi) \in W^n$ и $\sum\limits_{i \in z} (|i|+1)^k \|\varphi_i(\xi)\|_{W_n} < \infty$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ Через $P^{\pm\cdot}$ обозначим проекторы, действующие по правилу $P^{\pm\cdot}\varphi = \sum\limits_{i \in z_{\mp}\cdot} \varphi_i(\xi)\eta^i$, а через $W^{\pm\cdot}\{-\infty, 0\}$ — подалгебры $P^{\pm\cdot}(W\{-\infty, 0\})$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\} \in l\{-\infty, 0\}$. В силу естественного изоморфизма между пространствами $l\{-\infty, 0\}$ и $W\{-\infty, 0\}$ указанный выше оператор T подобен оператору $T = AP^{+\cdot} + BP^{-\cdot}$, где A, B — операторы умножения на функции $a(\eta, \xi)$, $b(\eta, \xi)$.

1. Пусть $W\{-\infty\}$ — счетно-нормированное пространство функций $\varphi(\eta) \in W$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям $\sum\limits_{i \in z} (|i|+1)^k |\varphi_i| < \infty$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, и $P^{\pm}$ — проекторы, действующие по правилу $P^{\pm}\varphi = \sum\limits_{i \in z_{\pm}} \varphi_i\eta^i$. Очевидно, $W\{-\infty\} \subset W\{-\infty, 0\}$.

Предложение 1. *Если оператор $\tilde{T}$ обратим в пространстве $W\{-\infty, 0\}$, то при $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ оператор $T_{\xi_0} = A_{\xi_0}P^+ + B_{\xi_0}P^-$, где A_{ξ_0}, B_{ξ_0} — операторы умножения на функции $a(\eta, \xi_0)$, $b(\eta, \xi_0)$, обратим в пространстве $W\{-\infty\}$.*

Доказательство. Пусть L_{ξ_0} — оператор, действующий из $W\{-\infty, 0\}$ в $W\{-\infty\}$ по следующему правилу: $L_{\xi_0}\left(\sum\limits_{i \in z} \varphi_i(\xi)\eta^i\right) = \sum\limits_{i \in z} \varphi_i(\xi_0)\eta^i$. Очевидно, $L\xi_0 P^{\pm\cdot} = P^{\pm}L_{\xi_0}$.

Пусть $f(\eta)$ — произвольная функция из $W\{-\infty\}$ и $\varphi(\eta, \xi) = (\tilde{T}^{-1}f)(\eta, \xi)$. Подействовав оператором L_{ξ_0} на обе части равенства $a(\eta, \xi)P^{+\cdot}\varphi(\eta, \xi) + b(\eta, \xi)P^{-\cdot}\varphi(\eta, \xi) = f(\eta)$, получим, что функция $\varphi(\eta, \xi_0) \in W\{-\infty\}$ является решением уравнения $\tilde{T}_{\xi_0}\varphi = f$. Следовательно, для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ $\operatorname{Im}\tilde{T}_{\xi_0} = W\{-\infty\}$. Покажем теперь, что $\operatorname{Ker}\tilde{T}_{\xi_0} = \{0\}$ для $A\xi_0 \in \Gamma^n$. Допустим противное, при некотором $\xi_0 \in \Gamma^n$ $\operatorname{Ker}\tilde{T}_{\xi_0} \neq \{0\}$ и $\varphi(\eta) \in W\{-\infty\}$ — произвольная ненулевая функция из $\operatorname{Ker}\tilde{T}_{\xi_0}$. Тогда существуют такие функции $f_i(\xi) \in W^n$, $i \in z$, что $f_i(\xi_0) = 0$ и $\tilde{T}\varphi = \sum\limits_{i \in z} f_i(\xi)\eta^i$. Рассмотрим последовательность функций, лежащих на единичной сфере пространства W^n:
$$\psi_m(\xi) = \frac{1}{(2m+1)^n} \sum_{|i_j| \leq m} (\xi_1\bar{\xi}_1^0)^{i_1}(\xi_2\bar{\xi}_2^0)^{i_2} \ldots (\xi_n\bar{\xi}^0)^{i_n}, \; j = 1, 2, \ldots, n, \text{ где}$$
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Можно показать, что для любой функции $c(\xi) \in W^n$, такой, что $c(\xi_0) = 0$, $\|c(\xi)\psi_m(\xi)\|_{W^n} \to 0$ при $m \to \infty$. Функции $\varphi_m(\eta, \xi) = \varphi(\eta)\psi_m(\xi) \in W\{-\infty, 0\}$ и $\|\varphi_m(\eta, \xi)\|_k = \|\varphi(\eta)\|_k \|\psi_m(\xi)\|_{W^n} = \|\varphi(\eta)\|_k$.

Так как $\tilde{T}\varphi_m = \sum_{i \in z} f_i(z)\psi_m(\xi)\eta^i$, то $\|\tilde{T}\varphi_m\|_k = \sum_{i \in z}(|i|+1)^k \times \times \|f_i(\xi)\psi_m(\xi)\|_{W^n} \leqslant (M+1)^k \sum_{|i|<M}\|f_i(\xi)\psi_m(\xi)\|_{W^n} + \sum_{|i|>M}(|i|+ +1)^k\|f_i(\xi)\|_{W^n} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, $\tilde{T}\varphi_m \to 0$, что противоречит обратимости оператора $\tilde{T}$. Следовательно, для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ оператор $\tilde{T}_{\xi_0}$ обратим в пространстве $W\{-\infty\}$. Предложение доказано.

2. Рассмотрим оператор $\tilde{T}^{-\cdot} = A_0^{-\cdot}P^{+\cdot} + P^{-\cdot}$, где $A_0^{-\cdot}$ — оператор умножения на функцию $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi) = \sum_{i=0}^{-\infty} a_i(\xi)\eta^i \in W^{-\cdot}\{-\infty, 0\} \oplus \oplus W^n$. В силу предложения 1 $a_0(\xi) \neq 0$ $(\xi \in \Gamma^n)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что функция $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi)$ имеет вид $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi) = 1 - a^{-\cdot}(\eta, \xi)$, где $a^{-\cdot}(\eta, \xi) \in W^{-\cdot}\{-\infty, 0\}$.

Предложение 2. *Для того чтобы оператор* $\tilde{T}^{-\cdot}$ *был обратим в пространстве* $W\{-\infty, 0\}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число* k_0, *что*

$$(j+1)^{-k_0}\left\|\sum_{i=0}^{j} P^{+\cdot}[(a^{-\cdot}(\eta, \xi))^i\eta^j]\right\|_0 \leqslant \text{const},\ j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (\divideontimes)$$

Доказательство. Оператор $\tilde{T}^{-\cdot}$ обратим тогда и только тогда, когда в пространстве $W^{+\cdot}\{-\infty, 0\}$ обратим оператор $\Omega^{-\cdot} = = P^{+\cdot}A_0^{-\cdot}P^{+\cdot} = P^{+\cdot}(I - A^{-\cdot})P^{+\cdot}$ (см. [6]). Нетрудно проверить, что $\Omega^{-\cdot}\left[\sum_{i=0}^{j} P^{+\cdot}[(a^{-\cdot}(\eta, \xi))^i\eta^j]\right] = \eta^j$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, откуда вытекает необходимость условия $(\divideontimes)$.

Обратно, если это условие выполнено, то, обозначив через N формальный ряд Неймана $\sum_{i=0}^{\infty} P^{+\cdot}(A^{-\cdot})^i P^{+\cdot}$ для оператора $\Omega^{-\cdot}$, для любой финитной функции $\varphi_m^{+\cdot}(\eta, \xi) = \sum_{i=0}^{m}\varphi_i(\xi)\eta^i$, получим $\|N\varphi_m^{+\cdot}\|_k \leqslant \text{const}\|\varphi_m^{+\cdot}\|_{k+k_0}$. Продолжение оператора N на все пространство $W^{+\cdot}\{-\infty, 0\}$ обозначим через $\tilde{N}$. Так как для любой финитной функции $\varphi_m(\eta, \xi)$ $\Omega^{-\cdot}\tilde{N}\varphi_m = \varphi_m$, то оператор $\tilde{N}$ является обратным справа к оператору $\Omega^{-\cdot}$. Оператор $\tilde{N}$ коммутирует с оператором $P^{+\cdot}A^{-\cdot}P^{+\cdot}$, поэтому он является и левым обратным к оператору $\Omega^{-\cdot}$ Предложение доказано.

Рассмотрим оператор $\tilde{T}^{+\cdot} = P^{+\cdot} + B^{+\cdot}P^{-\cdot}$, где $B^{+\cdot}$ — оператор умножения на функцию $b^{+\cdot}(\eta, \xi) = \sum_{i \in z_+} b_i\cdot(\xi)\eta^i \in W^{+\cdot}\{-\infty, 0\}$. Оператор $\tilde{T}^{+\cdot}$ подобен оператору $\overline{B^{+\cdot}P^{+\cdot}} + P^{-\cdot}$, где $\overline{B}^{+\cdot}$ — оператор умножения на функцию $\overline{b^{+\cdot}(\eta, \xi)}$ (см. [6]). Следствием предложения 2 является

Предложение 3. *Для того чтобы оператор $T^{+\cdot}$ был обратим в пространстве $W\{-\infty, 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число k_0, что*

$$(j+1)^{-k_0} \left\| \sum_{i=0}^{j} P^{+\cdot} \left[(1 - \overline{b_0^{-1}}\,(\xi)\, \overline{b^{+\cdot}\,(\eta,\ \xi)})^{i} \eta^{i} \right] \right\|_0 \leqslant \text{const},$$

$$j = 0, 1, 2, \ \ldots \qquad (**)$$

3. В общем случае вопрос об обратимости оператора $\tilde{T}$ решается следующей теоремой.

Теорема. *Для того чтобы оператор $\tilde{T}$ был обратим в пространстве $W\{-\infty, 0\}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $a(\eta, \xi)$, $b(\eta, \xi)$ удовлетворяли следующим условиям:*

1) *не имели общих нулей на* $\Gamma \times \Gamma^n$;

2) *допускали факторизацию* $a(\eta, \xi) = c(\eta, \xi)[1 - a^{-\cdot}(\eta, \xi)]$, $b(\eta, \xi) = c(\eta, \xi)\, b^{+\cdot}(\eta, \xi)$, *где* $c(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0\}$, $a^{-\cdot}(\eta, \xi) \in W^{-\cdot}\{-\infty, 0\}$, $b^{+\cdot}(\eta, \xi) \in W^{+\cdot}\{-\infty, 0\}$, $c(\eta, \xi) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$, $\xi \in \Gamma^n$, $a^{-\cdot}(\eta, \xi)$ *удовлетворяет условию* $(*)$, *а* $b^{+\cdot}(\eta, \xi)$ — *условию* $(**)$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть условия теоремы выполнены, тогда оператор $\tilde{T}$ допускает разложение в композицию $\tilde{T} = C\tilde{T}_0$, где C — обратимый оператор умножения на функцию $c(\eta, \xi)$, а $\tilde{T}_0 = (I - A^{-\cdot}) P^{+\cdot} + B^{+\cdot} P^{-\cdot}$. Покажем, что оператор $\tilde{T}_0$ также обратим в пространстве $W\{-\infty, 0\}$. Из предложений 2, 3, 1 вытекает, что для $\forall\, \xi_0 \in \Gamma^n$ в пространстве $W\{-\infty\}$ обратимы операторы $(I - A^{-\cdot}_{\xi_0}) P^{+} + P^{-}$ и $P^{+} + B^{+\cdot}_{\xi_0} P^{-}$. Поэтому (см. [4, 1]) функция $b^{+\cdot}(\eta, \xi_0)$ не имеет нулей внутри единичного круга, функция $a^{-\cdot}_0(\eta, \xi_0) = 1 - a^{-\cdot}(\eta, \xi)$ вне единичного круга, а на окружности эти функции имеют лишь конечное число нулей конечного порядка. Так как кроме того функции $b^{+\cdot}(\eta, \xi_0)$ и $a^{-\cdot}(\eta, \xi_0)$ не имеют общих нулей, то для $\forall\, \xi_0 \in \Gamma^n$ оператор $\tilde{T}_{0\xi_0}$ обратим (см. [5]). Следовательно, $\operatorname{Ker} \tilde{T}_0 = \{0\}$. Покажем, что $\operatorname{Im} \tilde{T}_0 = W\{-\infty, 0\}$. Для произвольных функций $f_1(\eta, \xi)$, $f_2(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0\}$ следующие уравнения имеют решения: $a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)\, \psi^{+\cdot}_1(\eta, \xi) + \psi^{-\cdot}_1(\eta, \xi) = f_1(\eta, \xi)$, $\psi^{+\cdot}_2(\eta, \xi) + b^{+\cdot}(\eta, \xi)\ \psi^{-\cdot}_2(\eta, \xi) = f_2(\eta, \xi)$. Откуда получаем $a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)\,[b^{+\cdot}(\eta, \xi)\, \psi^{+\cdot}_1(\eta, \xi)] + b^{+\cdot}(\eta, \xi) = b^{+\cdot}(\eta, \xi)\, f_1(\eta, \xi)$, $a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)\, \psi^{+\cdot}_2(\eta, \xi) + b^{+\cdot}(\eta, \xi)\,[a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)\, \psi^{-\cdot}_2(\eta, \xi)] = a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)\, f_2 \times (\eta, \xi)$, т. е. функции $b^{+\cdot}(\eta, \xi)\, f_1(\eta, \xi)$ и $a_0(\eta, \xi)\, f_2(\eta, \xi)$ принадлежат образу оператора $\tilde{T}_0$. Так как функции $b^{+\cdot}(\eta, \xi)$ и $a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)$ не имеют общих нулей, то для произвольной функции $f(\eta, \xi) \in W \times \{-\infty, 0\}$ существуют такие функции $f_1(\eta, \xi)$, $f_2(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0\}$, что $f(\eta, \xi) = b^{+\cdot}(\eta, \xi)\, f_1(\eta, \xi) + a^{-\cdot}_0(\eta, \xi)\, f_2(\eta, \xi)$ и, следовательно, $\operatorname{Im} \tilde{T}_0 = W\{-\infty, 0\}$.

Необходимость. Пусть оператор T обратим, тогда для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ в пространстве $W\{-\infty\}$ обратим оператор $\tilde{T}_{\xi_0} = A_{\xi_0} P^{+} + B_{\xi_0} P^{-}$. Поэтому (см. [4, 5]) функции $a(\eta, \xi_0)$ и $b(\eta, \xi_0)$ не имеют общих нулей и допускают факторизацию $a(\eta, \xi_0) = c(\eta, \xi_0)[1 - a^{-\cdot}(\eta, \xi_0)]$, $b(\eta, \xi_0) = c(\eta, \xi_0)\, b^{+\cdot}(\eta, \xi_0)$, где $0 \neq c(\eta, \xi_0) \in W\{-\infty\}$, $a^{-\cdot}(\eta, \xi_0) \in W^{-}\{-\infty\}$, $b^{+\cdot}(\eta, \xi_0) \in W^{+}\{-\infty\}$. Нетрудно проверить, что при $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ функция $(\tilde{T}^{-1} b)(\eta, \xi_0)$ совпадает с функцией $b^{+\cdot}(\eta, \xi_0) + a^{-\cdot}(\eta, \xi_0)$, откуда вытекает, что $b^{+\cdot}(\eta, \xi) \in W^{+\cdot}\{-\infty, 0\}$ и $a^{-\cdot}(\eta, \xi) \in W^{-\cdot}\{-\infty, 0\}$. Так как функции $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi) = 1 - a^{-\cdot} \times (\eta, \xi)$ и $b^{+\cdot}(\eta, \xi)$ не имеют общих нулей, то функция $c(\eta, \xi) \in W \times \{-\infty, 0\}$. Докажем, что в пространстве $W\{-\infty, 0\}$ обратим оператор $\tilde{T}^{-\cdot} = (I - A^{-\cdot}) P^{+\cdot} + P^{-\cdot}$. В силу предложения 2 отсюда следует, что функция $a^{-\cdot}(\eta, \xi)$ удовлетворяет условию (*). Для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ функция $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi_0)$ не имеет нулей вне единичного круга, а на окружности имеет лишь конечное число нулей конечного порядка (см. [4, 5]). Поэтому для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ оператор $\tilde{T}_{\xi_0}^{-\cdot} = (I - A_{\xi_0}^{-\cdot}) P^{+} + P^{-}$ обратим (см. [1]). Отсюда вытекает, что $\operatorname{Ker} \tilde{T}^{-\cdot} = \{0\}$. Покажем, что $\operatorname{Im} \tilde{T}^{-\cdot} = W\{-\infty, 0\}$. Для произвольной функции $f(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0\}$ уравнение $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi)\, \varphi^{+\cdot}(\eta, \xi) + b^{+\cdot}(\eta, \xi) \varphi^{-\cdot}(\eta, \xi) = b^{+\cdot}(\eta, \xi)\, f^{+\cdot}(\eta, \xi)$ имеет решение в пространстве $W\{-\infty, 0\}$. Для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ получим $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi_0) \psi^{+\cdot}(\eta, \xi_0) + b^{+\cdot}(\eta, \xi_0)\, \psi^{-\cdot}(\eta, \xi_0) = b^{+\cdot}(\eta, \xi_0) f^{+\cdot}(\eta, \xi_0)$ и $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi_0) \tilde{\varphi}^{+\cdot}(\eta, \xi_0) + \varphi^{-\cdot}(\eta, \xi_0) = f^{+\cdot} \times (\eta, \xi_0)$, где $\varphi^{+\cdot}(\eta, \xi_0) = b^{+\cdot}(\eta, \xi_0)\, \tilde{\varphi}^{+\cdot}(\eta, \xi_0)$. Поскольку функции $a_0^{-\cdot}(\eta, \xi)$ и $b^{+\cdot}(\eta, \xi)$ не имеют общих нулей, то существует такая функция $\psi(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0\}$, что $\varphi^{+\cdot}(\eta, \xi) = b^{+\cdot}(\eta, \xi)\, \psi \times (\eta, \xi)$. Для $\forall \xi_0 \in \Gamma^n$ функция $b^{+\cdot}(\eta, \xi_0)$ имеет на окружности лишь конечное число нулей конечного порядка. Поэтому $\tilde{\varphi}^{+\cdot}(\eta, \xi) \equiv \psi(\eta, \xi) \in W\{-\infty, 0)$ и $\tilde{T}^{-\cdot}(\tilde{\varphi}^{+\cdot} + \varphi^{-\cdot}) = f$.

Аналогично доказывается обратимость оператора $\tilde{T}^{+\cdot} = P^{+\cdot} + B^{+\cdot} P^{-\cdot}$ в пространстве $W\{-\infty, 0\}$. В силу предложения 3 отсюда вытекает, что функция $b^{+\cdot}(\eta, \xi)$ удовлетворяет условию (**). Теорема доказана.

В качестве примера приведем несколько аннулирующихся функций $a(\eta, \xi)$, $b(\eta, \xi)$, $\eta, \xi \in \Gamma$, для которых соответствующий оператор T обратим в пространстве $l\{-\infty, 0\}$:

1) $a(\eta, \xi) = (1 - \eta^{-1})\, c(\xi)$, $b(\eta, \xi) = (1 + \eta)\, c(\xi)$, $c(\xi) \in W$, $c(\xi) \neq 0$; $a(\eta, \xi) = (1 - d_1(\xi)\, \eta^{-1})$, $b(\eta, \xi) = (1 - d_2(\xi)\, \eta)$;

2) $d_1(\xi), d_2(\xi) \in c^1(\Gamma)$, $|d_1(\xi)|$, $|d_2(\xi)| \leqslant 1$, $d_1 d_2 \neq 1$;

3) $a(\eta, \xi) = (1 + \xi^m \eta^{-k})$, $b(\eta, \xi) = 2 - \eta - \xi$, $m \in z$, $k \in z_+$.

Замечание. Критерий обратимости оператора Винера-Хопфа в полупространстве $W^{+\cdot}\{-\infty, 0\}$ является частным случаем теоремы при $b(\eta, \xi) \equiv 1$.

Рассмотрение парного оператора $\tilde{\Pi} = P^{+\cdot} A + P^{-\cdot} B$ сводится к изучению прямой суммы двух операторов Винера-Хопфа. При этом условие 2 теоремы является необходимым и достаточным для обратимости оператора $\tilde{\Pi}$ в пространстве $W\{-\infty, 0\}$.

В заключение выражаю благодарность В. Б. Дыбину, руководившему работой.

Список литературы: **1.** *Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К.* Применение метода нормализации к одному классу бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. — Изв. вузов. Математика, 1967, № 10, с. 39 — 49. **2.** *Гольденштейн Л. С., Гохберг И. Ц.* О многомерном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов, и его дискретном аналоге.— Докл. АН СССР, 1960, 131, № 1, с. 9 — 12. **3.** *Гольденштейн Л. С.* Дискретный аналог многомерного интегрального уравнения Винера—Хопфа.— Мат. исследования, т. 2, вып, 3.— Кишинев, 1967, с. 52—63. **4.** *Зильберман Б.* О сингулярных интегральных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций.— Мат. исследования, 1971, VI: 3(21). с. 168 — 179. **5.** *Карапетянц Н. К.* Дискретные уравнения типа свертки в одном исключительном случае.— Сиб. мат. журн., 1970, 11, № 1, с. 80 — 90. **6.** *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.— Кишинев: Изд. АН МССР, 1973.— 426 с.

Поступила 29 декабря 1977 г.