УДК 517.5

А. М. ГОМБЕРГ

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ РОСТКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть K — поле вещественных или комплексных чисел, а F: $(K^n, 0) \to (K^p, 0)$ — росток аналитического отображения, главная часть которого $F_m(x)$ является однородным полиномиальным отображением степени m. В [1] доказано, что некоторым преобразованием Φ: $(K^n, 0) \to (K^n, 0)$, сходящимся в окрестности начала координат, росток F можно привести к виду $F(\Phi(x)) = F_m(x) + h(x)$, $\left(F'_m\left(\frac{d}{dx}\right)\right)^* h(x) = 0$. Докажем, что аналогичная теорема справедлива и для квазиоднородной фильтрации.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор положительных рациональных чисел. Согласно (см. [2]), моном $x^I = x_1^{I_1} \ldots x_n^{I_n}$ имеет при типе α обобщенную степень $d = (I, \alpha) = \sum\limits_{\nu} I_\nu \alpha_\nu$. Множество всех обобщенных степеней при заданном типе α образует возрастающую последовательность $d_1 = \min \alpha_1 < d_2 < \cdots < d_n < \cdots$ и содержится в некоторой арифметической прогрессии. Квазиоднородным полиномом обобщенной степени d при типе α называется линейная комбинация мономов степени d. Аналогично определяется понятие квазиоднородного отображения f: $(K^n, 0) \to (K^p, 0)$.

Теорема. *Пусть росток аналитического отображения F: $(K^n, 0) \to (K^p, 0)$ имеет вид $F(x) = F_m(x) + f(x)$, где $F_m(x)$ — квазиоднородное отображение степени d_m, а f — комбинация мономов обобщенной степени $> d_m$. Существует сходящееся в начале координат преобразование Φ: $(K^n, 0) \to (K^p, 0)$, которое приводит росток F к виду $F(\Phi(x)) = F_m(x) + h(x)$, $\left(F_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^* h(x) = 0$.*

Пример. Пусть $p = 1$ и F: $(K^n, 0) \to (K^1, 0)$ — росток аналитической функции. С помощью линейного преобразования можно привести F к виду $F(x) = a x_1^m + \sum\limits_I a_I x^I$, где $a \neq 0$, а все мультииндексы $I = (I_1, \ldots, I_n)$ во втором слагаемом таковы, что либо $I_2 + \cdots + I_n > 0$, либо $I_1 \geq m + 1$. Выберем тип квазиоднородности $\alpha = \left(\frac{1}{m}, 1, \ldots, 1\right)$. Применяя нашу теорему, получим, что каждую функцию F сходящимся преобразованием Φ можно привести к виду

$$F(\Phi(x)) = a x_1^m + \sum_{k=0}^{m-2} x_1^k h_k(x_2, \ldots, x_n),$$

где h_k — сходящиеся ряды от меньшего числа переменных (см. [4]).

Доказательство теоремы. Обозначим через $P_d: (K[n, p]) \to (K[n, p])$ естественный проектор на подмножестве $K_d[n, p] = P_d K[n, p]$ отображений степени не выше d, а через $P^d: K[n, p] \to$

$\to K[n, p]$ — проектор на подпространство $K^{(d)}[n, p]$ квазиоднородных отображений степени d. Кроме того, обозначим $\widetilde{K}^{(d)}[n, n] \subset \subset K[n, n]$ подпространство таких отображений $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, для которых координата φ_j является квазиоднородным полиномом степени $d + \alpha_j$. Введем в пространстве $K_d[n, p]$ скалярное произведение, положив $(f, h) = \sum\limits_I \frac{1}{I!} f_I^j \bar{h}_I^j$ для каждой пары

$$f(x) = \left\{\sum_I \frac{1}{I!} f_I^j x^I\right\}_{j=1}^p$$

$$h(x) = \left\{\sum \frac{1}{I!} h_I^j x^I\right\}_{j=1}^p$$

элементов из $K_d[n, p]$.

Будем теперь искать преобразованием к нормальной форме в виде $\Phi(x) = x + \varphi(x)$, $\varphi(x) = 0(x)$. Тогда для φ получим уравнение $F(x + \varphi(x)) = F_m(x) + h(x)$, или $F_m'(x) = h(x) - \{F(x + \varphi) - - F_m(x) - F_m'(x)\varphi(x)\}$. Запишем φ в виде $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}(x_i)$, где $\widetilde{\varphi}^{(d_i)} \in \widetilde{K}^{(d_i)}[n, n]$. Тогда для слагаемых $\widetilde{\varphi}^{(d_i)}$ имеем рекуррентную систему

$$A_i \widetilde{\varphi}^{(d_i - d_m)} = h^{(d_i)} + R_i[\widetilde{\varphi}^{(d_1)}, \ldots, \widetilde{\varphi}^{(d)}],$$

где $i = m + 1, \ldots$; $d < d_i - d_m$; $R_i[\widetilde{\varphi}^{(d_1)}, \ldots, \widetilde{\varphi}^{(d)}](x) = -P^{(d_i)} \times \times \{F(x + \varphi) - F_m(x) - F_m'(x)\varphi(x)\}$ и $A_i : \widetilde{K}^{(d_i - d_m)}[n, n] \to K^{(d_i)} \times \times [n, p]$ — оператор умножения на матрицу Якоби $F_m'(x)$. Пусть теперь N_i ортопроектор на образ и $T_i = \operatorname{Im} A_i \to \widetilde{K}^{(d_i - d_m)}[n, n]$ — правый i-обратный на образе к оператору A_i. Положим последовательно $\widetilde{\varphi}^{(d_i - d_m)} = T_i N_i R_i[\widetilde{\varphi}^{(d_1)}, \ldots, \widetilde{\varphi}^{(d)}]$, $i = m + 1, \ldots$ и $P^{(d_i)} h = -(E - N_i) R_i[\widetilde{\varphi}^{(d_1)}, \ldots, \widetilde{\varphi}^{(d)}]$, $i = m + 1, \ldots$ где E — единичный оператор. Тогда $P^{(d_i)} h \in \ker A_i^*$ и для завершения доказательства остается оценить нормы $\|\widetilde{\varphi}^{(d_i)}\|$. Для этого согласно [3, с. 238] достаточно в свою очередь доказать, что нормы операторов T_i ограничены единой константой. Имеют место канонические изоморфизмы $\widetilde{K}^{(d)}[n, n] \cong K^n \otimes K^{(d)}[n, 1]$, $K^{(d)}[n, p] \cong K^p \otimes K^{(d)} \times \times [n, 1]$ и вложения $K^{(d)}[n, 1] \subset K^{(d_m)}[n, 1] \otimes K^{(d - d_m)}[n, 1]$. Оператор

$$\widetilde{A}_i = A_{m+1} \otimes E_i : K^n \otimes K^{(d_i - d_m)}[n, 1] \to K^p \otimes K^{(d_m)}[n, 1] \otimes \otimes K^{(d_i - d_m)}[n, 1]$$

можно рассматривать как продолжение оператора A_i. Здесь $E_i : K^{(d_i - d_m)}[n, 1] \to K^{(d_i - d_m)}[n, 1]$ — единичный оператор. Оператор $T_i = T_{m+1} \otimes E$ является правым обратным на образе к оператору A_i.

Следовательно, $\|T_i\| \leqslant \|\tilde{T}_i\| = \|T_{m+1}\|$, $(i = m + 1, \ldots)$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков аналитических отображений. В кн.: Тр. ФТИНТ АН УССР. Диф. уравнения и некоторые методы функц. анализа, с. 29—47. 2. *Арнольд В. И.* Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. — УМН, 1974, 29 : 2, с. 9—49. 3. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. — М.: Мир, 1969. — 264 с. 4. *Levinson N.* A canonical form an analitic function of severul variables at a critical point, Bull Amer. Math. Soc., 1960, vol. 66, p. 68—69.

Поступила 10 февраля 1979 г.