УДК 517.53

С. Ю. ФАВОРОВ

О МНОЖЕСТВАХ УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим через $\mathrm{PSH}(U)$ класс функций, плюрисубгармонических (п. с. г.) в области $U \subset C^n$. Будем говорить, что замкнутое множество A есть множество устранимых особенностей для п. с. г. функций (для локально ограниченных сверху п. с. г. функций), если для любой функции $u(z) \in \mathrm{PSH}(U \setminus A)$ (соответственно для любой функции $u(z) \in \mathrm{PSH}(U \setminus A)$, ограниченной сверху в окрестности каждой точки $U \cap A$) найдется единственная функция $\tilde{u}(z) \in \mathrm{PSH}(U)$ такая, что $\tilde{u}(z) = u(z)$ в $U \setminus A$.

П. Лелон [1] показал, что любое замкнутое множество нулевой $2n$-мерной ньютоновой емкости есть множество устранимых особенностей для локально ограниченных сверху п. с. г. функций. Б. Шиффман [2] доказал, что любое замкнутое множество $A \subset C^n$ нулевой $2n-2$-мерной меры Хаусдорфа есть множество устранимых особенностей для п. с. г. функций.

У. Сегрель [3] построил пример замкнутого множества $A \subset C^2$ положительной $2n$-мерной ньютоновой емкости, которое является множеством устранимых особенностей для п. с. г. функций. При этом множество A имело вид $K + iR^2$, где $K \subset R^2$ — компакт на оси абсцисс нулевой линейной меры Лебега.

Докажем теорему.

Теорема. *Пусть $E \subset R^n$ — компакт нулевой $n-1$-мерной меры Хаусдорфа*, $P = \{z \in C^n\colon \operatorname{Re} z \in E, \operatorname{Im} z \in R^n\}$. Для любой области $U \subset C^n$ множество P есть множество устранимых особенностей для локально ограниченных сверху п. с. г. функций, а любой компакт $K \subset P \cap U$ есть множество устранимых особенностей для п. с. г. функций в U.*

В доказательстве этой теоремы через $m_k(A)$ будет обозначаться k-мерная мера Лебега подмножества A k-мерного пространства. Через $B(a; r)$ будет обозначаться шар радиуса r с центром в точке a, $\omega_k = m_k(B(0, 1))$ для шара $B(0, 1)$ из k-мерного пространства. Для $z \in C^n$ положим $'z = (z_2, \ldots, z_n) \in C^{n-1}$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $x, y \in R^n$.

Докажем вначале некоторые леммы.

Лемма 1. *Для почти всех точек $'z \in C^{n-1}$ комплексные прямые $L('z) = \{(z_1, 'z)\colon z_1 \in C\}$ не пересекают множество P.*

Для доказательства достаточно заметить, что проекция E на гиперплоскость $x_1 = 0$ имеет $(n-1)$-меру нуль. Поэтому для почти всех $'x \in R^{n-1}$ прямые вида $\{(x_1, 'x)\colon x_1 \in R\}$ не пересекают E. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть K компакт, $K \subset P \cap U$, $u(z) \in \mathrm{PSH}(U \setminus K)$. Тогда $u(z)$ ограничена в окрестности каждой точки K.*

Доказательство. Пусть ω — открытое множество такое, что $K \subset \omega \subset U$. Положим $c = \sup\{u(z)\colon z \in \partial\omega\}$. По предыдущей лемме комплексные прямые $L('z) = \{(z_1, 'z)\colon z_1 \in C\}$ для почти всех $'z$ не пересекают множество P. Следовательно, функция $u(z_1, 'z)$ субгармонична по переменной z_1 в $L('z) \cap \omega$ для почти всех $'z$, и поэтому для почти всех $z \in \omega \setminus K$ $u(z) \leqslant c$. Воспользовавшись неравенством

$$u(z) \leqslant \frac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \int\limits_{|\zeta| < r} u(z + \zeta)\, dm_{2n}(\zeta),$$

где r выбрано так, что $B(z, r) \subset \omega \setminus K$, получим оценку $u(z) \leqslant c$ для всех $z \in \omega \setminus K$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $V \supset E$ существует функция $\psi(x) \in C^\infty(R^n)$ и открытое множество Ω, $E \subset \Omega \Subset V$ такие, что 1) $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, $\forall x \in R^n$; 2) $\psi(x) = 0$, $x \notin V$; 3) $\psi(x) = 1, x \in \Omega$; 4) $\int \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right| dm_n < \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Выберем неотрицательную функцию $\alpha(t) \in C^\infty(R)$ такую, что $\alpha(t) = 1$ при $t \leqslant 1$, $\alpha(t) = 0$ при $t \geqslant 2$ и $|\alpha'(t)| \leqslant 2$ для всех $t \in R$. Выберем систему шаров $B(x^i; r_i)$, $i = 1, \ldots,$

---

* Т. е. для любого $\varepsilon > 0$ множество E может быть покрыто шарами, радиусы r_i которых удовлетворяют соотношению $\sum r_i^{n-1} < \varepsilon$.

N и таких, что $B(x^i;\ 2r_i) \subset V$, причем их объединение покрывает компакт E и $\sum\limits_i r_i^{n-1} < \varepsilon 2^{-n-1}\omega_n^{-1}$. Положим

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha\left(\| x - x^i \| \cdot r_i^{-1}\right).$$

Отметим, что $\varphi(x) \geqslant 1$ в некоторой окрестности E, $\operatorname{supp}\varphi \subset V$ и $\int \|\operatorname{grad}\varphi(x)\|\, dm_n \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \int \|\operatorname{grad}\alpha(\|x - x^i\| \cdot r_i^{-1})\|\, dm_n \leqslant 2^{n+1}\omega_n \times \times \sum\limits_{i=1}^{N} r_i^{n-1} < \varepsilon$. Положим $\tilde{\varphi}(x) = \min\{\varphi(x);\ 1\}$, $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) \divideontimes \beta(x)$, где $\beta(x)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с носителем в шаре $B(0,\ \delta)$ и такая, что $\int \beta(x)\, dm_n = 1$. Здесь $\divideontimes$ означает свертку, а $\delta > 0$ выбрано столь малым, чтобы $\operatorname{supp}\psi \subset V$ и $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) = 1$ при $x \in \Omega \supset E$. Далее

$$\left| \frac{\tilde{\varphi}(t,\ 'x) - \tilde{\varphi}(x_1,\ 'x)}{t - x_1} \right| \leqslant \left| \frac{\varphi(t,\ 'x) - \varphi(x_1,\ 'x)}{t - x_1} \right| \leqslant C$$

равномерно по $x \in R^n$, $t \in R$, причем для почти всех x существует $\tilde{\varphi}'_{x_1}(x)$ и $|\tilde{\varphi}'_{x_1}(x)| \leqslant |\varphi'_{x_1}(x)|$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости для почти всех $x \in R^n$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right| \leqslant \left| \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_1} \divideontimes \beta(x) \right| \leqslant \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right| \divideontimes \beta(x)$$

и, следовательно,

$$\int \left| \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right| dm_n \leqslant \int \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right| \divideontimes \beta(x)\, dm_n = \int \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right| dm_n < \varepsilon.$$

Аналогичная оценка верна и для остальных частных производных функций $\psi(x)$. Лемма доказана.

Доказанные леммы позволяют использовать в доказательстве теоремы методику, примененную в работе [3].

Ввиду леммы 2 достаточно доказать возможность продолжения на множество U функции $u(z) \in \mathrm{PSH}(U \setminus P)$, ограниченной сверху в окрестности каждой точки $U \cap P$. Рассматривая, если это необходимо, вместо функции $u(z)$ функции $u_N(z) = \max\{u(z);\ -N\}$, $N = 1,\ 2,\ \ldots$ можно считать, что функция $u(z)$ ограничена снизу в $U \setminus P$ и, следовательно, локально суммируема в U. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что форма Леви функции $u(z)$, т. е. обобщенная функция в U $\sum\limits_{r,\ g} \frac{\partial^2 u}{\partial z_r \partial \bar{z}_g} \lambda_r \bar{\lambda}_g$ будет положительна для любого $\lambda \in C^n$.

Заметим, что единственность продолжения вытекает из справедливого для любой функции $\widetilde{u}(z) \in \mathrm{PSH}(U)$ равенства

$$\widetilde{u}(z) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \int\limits_{|z-\zeta|<r} \widetilde{u}(\zeta)\, dm_{2n}(\zeta)$$

и из того, что $\widetilde{u}(z) = u(z)$ почти всюду в U.

Построим, пользуясь леммой 3, последовательность функций $\chi_k(z) = \chi_k(x) \in C^\infty(R^n)$ со следующими свойствами: а) $0 \leqslant \chi_k(x) \leqslant 1$; б) $\chi_k(x) = 0$ в некоторой окрестности множества E, своей для каждого k; в) последовательность $\chi_k(x)$ монотонно возрастает к 1 на $R^n \setminus E$; г) $\int \left| \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} \right| dm_n \to 0$ при $k \to \infty$ для всех j. Для доказательства положительности формы Леви функции $u(z)$ достаточно доказать, что для любой финитной в U функции $\varphi(z) \in C^\infty(C^n)$ выполняется равенство

$$\lim_{k \to \infty} \int \sum_{r,\, q} \frac{\partial^2 (\varphi \chi_k)}{\partial z_r \partial \bar{z}_q} \lambda_r \bar{\lambda}_q u(z)\, dm_{2n}(z) = \int \sum_{r,\, q} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_r \partial \bar{z}_q} \lambda_r \bar{\lambda}_q u(z)\, dm_{2n}(z). \qquad (1)$$

Действительно, неотрицательность правой части для любой финитной функции $\varphi \in C^\infty(U)$ означает неотрицательность формы Леви для функции $u(z)$. Неотрицательность левой части следует ввиду того, что $u(z) \in \mathrm{PSH}(U \setminus P)$ и поэтому сужение ее формы Леви на $U \setminus P$ неотрицательно.

Заметим теперь, что любая эрмитова форма представляется в виде

$$\sum_{r,\, q} a_{rq} \lambda_r \bar{\lambda}_q = \sum_{r,\, q} a_{rq} \mu_r \mu_q + \sum_{r,\, q} a_{rq} \nu_r \nu_q + 2 \sum_{r,\, q:\, r \neq q} (\mathrm{Im}\, a_{rq})(\nu_r \mu_q - \nu_q \mu_r),$$

где $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu, \nu \in R^n$. Поэтому достаточно доказать равенство (1) при $\lambda = \mu \in R^n$, а затем равенство

$$\lim_{k \to \infty} \int \mathrm{Im} \left[\frac{\partial^2 \varphi (1 - \chi_k)}{\partial z_r \partial \bar{z}_q} \right] u(z) dm_{2n}(z) = 0. \qquad (2)$$

Для доказательства (1) при фиксированном $\lambda = \mu \in R^n$ выполним замену переменных $z = T\zeta$, где T — ортогональная матрица с первым столбцом, равным $|\mu|^{-1} \mu$, и выделим интегрирование по переменной ζ_1. Тогда (1) примет вид

$$\lim_{k \to \infty} |\mu|^2 \int v_k('\zeta)\, dm_{2n-2}('\zeta) = |\mu|^2 \int v_0('\zeta)\, dm_{2n-2}('\zeta), \qquad (3)$$

где $v_k('\zeta) = \int \frac{\partial^2 (\varphi \chi_k)(T\zeta)}{\partial \zeta_1 \partial \bar{\zeta}_1} u(T\zeta)\, dm_2(\zeta_1)$, $v_0('\zeta) = \int \frac{\partial^2 \varphi(T\zeta)}{\partial \zeta_1 \partial \bar{\zeta}_1} u(T\zeta) \times$ $\times\, dm_2(\zeta_1)$. Согласно лемме 1, для почти всех $'\zeta \in C^{n-1}$ комплексные лучи $L('\zeta) = \{(\zeta_1, '\zeta) : \zeta_1 \in C\}$ не пересекают P. Поэтому на таких лучах функция $u(T\zeta)$ будет субгармонической по переменной ζ_1 и, следовательно, обобщенная функция $\frac{\partial^2 u(T\zeta)}{\partial \zeta_1 \partial \bar{\zeta}_1}$ совпадает с некоторой мерой μ. Для таких $'\zeta$ $v_k('\zeta) = \int (\varphi\chi_k)(T\zeta)\,d\mu(\zeta_1)$. Подынтегральная функция при $k \to \infty$ монотонно возрастает к функции $\varphi(T\zeta)$, поэтому последовательность $v_k('\zeta)$ монотонно возрастает к выражению $\int \varphi(T\zeta)\,d\mu(\zeta_1) = v_0('\zeta)$. Таким образом, последовательность неотрицательных функций $v_k('\zeta)$ монотонно возрастает почти всюду к функции $v_0('\zeta)$. Отсюда следует (3).

Далее, заметим, что для любых r, q

$$\operatorname{Im}\frac{\partial^2\varphi(1-\chi_k)}{\partial z_r\partial\overline{z}_q} = (1-\chi_k)\operatorname{Im}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_r\partial\overline{z}_q} + \frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\frac{\partial\chi_k}{\partial x_q} - \frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial y_q}\frac{\partial\chi_k}{\partial x_r}.$$

Учитывая равномерную ограниченность на $\operatorname{supp}\varphi$ функций $u(z)$ и всех производных функции $\varphi(z)$, а также свойства в), г) последовательности функций $\chi_k(z)$, получим соотношение (2). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Lelond P.* Ensembles singuliers impropres des functions plurisousharmoniques. — Journ. Math. Pures Appl., 1957, vol. 36, p. 263—303 2. *Shiffman B.* Extension of positive line boundles and meromorphic maps. — Jnvent. Math., 1972, vol. 15, p. 332-347, 3. *Ceqrell U.* Sur les ensembles sinquliers impropres des functions plurisousharmoniques. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1975, vol. 281, p. A905 — A908.

Поступила 22 октября 1979 г.