УДК 517.946

Б. ЁРИККЕ

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С РЕДКИМ СПЕКТРОМ. I

1. Обобщение теоремы братьев Рисс и теоремы единственности для функций, аналитических в круге

Будем называть множество $F \subset \boldsymbol{Z}$ риссовским множеством (R-множеством), если всякий заряд μ, сосредоточенный на окружности $\boldsymbol{T}$ и такой, что $\hat{\mu}(n) = 0$ при любом $n \notin F$, абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $\boldsymbol{T}$. R-множества изучались в [8, 9].

Множество $F \subset \boldsymbol{Z}$ называется сильным R-множеством, если $F \cup F_0$ есть R-множество всякий раз, когда им оказывается F_0.

Конечное объединение арифметических прогрессий будем называть решеткой. Точнее, пусть $a_1, \ldots, a_k \in \boldsymbol{Z}$; $n_k \in N$; множество $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \{a_j + n_j \boldsymbol{Z}\}$ называется k-решеткой; если $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} n_j \geqslant M$, то эта решетка называется M-редкой.

Предложение 1. *Пусть F — решетка. Существует заряд ν_F с конечным носителем (на окружности $\boldsymbol{T}$) такой, что $F = \hat{\nu}_F^{-1}(0)$.*

Доказательство. Если $F = \{a + n\boldsymbol{Z}\}$ $(a \in \boldsymbol{Z}, n \in N)$, то (полагая $\zeta_n = \exp \frac{\pi i}{n}$) в качестве ν_F можем взять

$$\frac{1}{2\pi i}\left(e^{+i\frac{a\pi}{n}}\delta_{\zeta_n} - e^{-i\frac{a\pi}{n}}\delta_{\overline{\zeta}_n}\right)^*$$

(ясно, что $(\hat{\nu}_F)(m) = \sin\frac{a-m}{n}\pi$, $m \in \boldsymbol{Z}$). Для k-решетки с $k > 1$ достаточно взять свертку зарядов, соответствующих прогрессиям, объединение которых равно F.

Замечание 1. Если F — k-решетка, то носитель заряда ν_F состоит из всевозможных точек вида $\exp \pi i \left(\sum_{j=1}^{k} \pm \frac{1}{n_j}\right)$; если F — k-решетка редкости M, то $\left|\pi \sum_{j=1}^{k} \pm \frac{1}{n_j}\right| \leqslant \frac{\pi k}{M}$.

Следующая теорема указывает один способ построения новых R-множеств из уже имеющихся. Пусть Q — R-множество, $\{P^l\}$ $(l \in \boldsymbol{Z} \setminus Q)$ — семейство R-множеств. Пусть еще $\{\pi^l\}$ $(l \in \boldsymbol{Z} \setminus Q)$ — семейство решеток, не содержащих свой индекс: $f \notin \pi^l$ при любом $f \in \boldsymbol{Z} \setminus Q$.

Теорема 1.** *Множество* $F \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{l \in \boldsymbol{Z} \setminus Q} (\Pi^l \cup P^l)$ (1) *есть R-множество.*

Полагая $P^l = Q$ $\left(l \in CQ \setminus \{0\} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{Z} \setminus (Q \cup \{0\})\right)$, $\Pi^l = \{2l\boldsymbol{Z}\}$ в качестве F снова получим Q; а расширяя P^l, можем надеяться получить в качестве F множества более широкие, чем Q.

Доказательство. Пусть μ — заряд на окружности $\boldsymbol{T}$, $\hat{\mu}(CF) = 0$. Положим $\mu = \mu_a + \mu_s$, где μ_a — абсолютно непрерывная, а μ_s — сингулярная составляющие заряда μ. С каждым $l \in CQ$ свяжем заряд $\nu \overset{\text{def}}{=} \nu_l$ (см. предложение 1) и рассмотрим заряд $\gamma_l \overset{\text{def}}{=} \nu_l \ast \mu = \nu_l \ast \mu_a + \nu_l \ast \mu_s$. Легко видеть, что функция $\hat{\gamma}_l$ тождественно равна нулю на множестве

$$\bigcup_{m \in CQ} C(\Pi^m \cup P^m) \cup \Pi^l = \bigcup_{m \in CQ} (C\Pi^m \cap CP^m) \cup \Pi^l \supset (C\Pi^l \cap CP^l) \cup \Pi^l \supset CP^l,$$

так что $\hat{\gamma}_l$ сосредоточена на R-множестве P^l, и потому заряд γ_l абсолютно непрерывен. С другой стороны, заряд $\gamma_l \ast \mu_a$ также абсолютно непрерывен, следовательно абсолютно непрерывен и

---

* $\delta_a(E) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E, \end{cases}$ $a \in \boldsymbol{T}$, $E \subset \boldsymbol{T}$

** Это частный случай одного результата Мейера о локально компактных группах.

$\nu_l \ast \mu_s$. Но ν_l — заряд с конечным носителем, и потому заряд $\nu_l \ast \mu_s$ остается сингулярным. Значит, $\nu_l \ast \mu_s = 0$, $\hat{\nu}_l\, \hat{\mu}_s = 0$, а $\hat{\mu}_s(l) = 0$, так как $\hat{\nu}_l(l) \neq 0$. Итак, $\hat{\mu}_s | CQ = 0$ и $\mu_s = 0$ (вследствие риссовости множества Q).

Следствие 1. Если множество F представимо в виде (1), где все Π^l — решетки, и все P^l — конечны, то F сильное R-множество.

Доказательство. Пусть F_0 — R-множество. Тогда $F \cup F_0 = \bigcap_{l \in CQ} [\Pi^l \cup (P^l \cup F_0)]$. Любое конечное множество целых чисел есть сильное R-множество, так что $P^l \cup F_0$ — R-множество при любом $l \in CQ$. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство. Только что доказанное следствие служит источником ряда конкретных примеров сильных R-множеств.

Пример 1. Множество P всех простых чисел есть сильное R-множество [9].

Действительно, применим следствие 1, полагая

$$Q = \{l \in Z : l \leqslant -2\}; \quad \Pi^l = Z \setminus \{l + 3lZ\} = \bigcup_{\substack{j=0,\ 1,\ 3|l|-1 \\ j \neq 2|l|}} \{j + 3lZ\} \not\ni \{l\};$$

$P^l = \varnothing$. Остается убедиться в том, что при всех целых числах $l \leqslant -2$ множество $P \subset \Pi^l$. Но это очевидно, ибо $\boldsymbol{Z} \setminus \Pi^l = \{l + 3l\boldsymbol{Z}\}$ не пересекается с множеством P-простых чисел.

Пример 2. Множество $\boldsymbol{Z}^2$ (всех квадратов целых чисел) есть сильное R-множество [9]. Действительно, положим $Q = \boldsymbol{Z}_- = \boldsymbol{Z} \cap (-\infty,\ 0)$;

$$\Pi^l = Z \setminus \{l + 3l^2 Z\} = \bigcup_{\substack{j=0,\ 1,\ \ldots,\ 3l^2-1 \\ j \not\equiv l \,(\mathrm{mod}\ 3l^2)}} \{j + 3l^2 Z\} \not\ni l;$$

$P^l = \varnothing$. Проверка того, что $(\boldsymbol{Z} \setminus \Pi^l) \cap \boldsymbol{Z}^2 = \{l + 3l^2\boldsymbol{Z}\} \cap \boldsymbol{Z}^2 = \varnothing$ при любом $l \in Q$ несколько сложнее, чем в первом примере. Допустим, что это пересечение не пусто. Тогда при некоторых целых p и q имеем $n + 3n^2 p = q^2$. Поскольку наибольший общий делитель положительных чисел $\{-n\}$ и $\{-1 - 3np\}$ равен единице, для некоторого целого r $1 + 3np = -r^2$, т. е. $r^2 \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, что невозможно.

Пример 3. Множество $F = \{m^k\}_{k=1}^{\infty}$, $m \in N \setminus \{1\}$ или более общо, $F = \{1;\ 2;\ \ldots,\ h_1 l_1;\ h_2 l_1,\ h_2(l_1 + 1),\ \ldots,\ h_2 l_2;\ h_3 l_2,\ h_3(l_2 + 1),\ \ldots,\ h_3 l_3;\ \ldots\}$, где h_j — возрастающая последовательность натуральных чисел, причем $h_{j+1}(h_j)^{-1}$ — целое $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$; l_j — натуральные числа, есть сильное R-множество.

Действительно, можно применить следствие 1 с $Q = \boldsymbol{Z}_-$, $\Pi^l = \{h_{j(l)}\boldsymbol{Z}\}$, где $h_{j(l)}$ — некоторое из h_j, большее $|l|$,

$$P^l = F \cap [0,\ h_{j(l)-1} l_{j(l)-1}].$$

Приведем без доказательства еще два примера [10, 11] сильных R-множеств; все они охватываются следствием 1: $F = \{a^2 + b^2 : a,\ b \in \boldsymbol{Z}\}$; $F = \{a_1! + a_2! + \cdots + a_n! : a_i \in \boldsymbol{Z}_+\}$.

Теорема 2. *Пусть множество $F \subset \boldsymbol{Z}$ имеет сколь угодно длинные лакуны, т. е. существует последовательность пар $\{(n_k, n'_k)\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что $n_k < n'_k$, $n_k, n'_k \in \boldsymbol{Z}$, $\lim\limits_{k \to \infty} (n'_k - n_k) = +\infty$ и $F \cap [n_k, n'_k] = \varnothing$ при любом k. Если заряд μ, сосредоточенный на T, таков, что $\hat{\mu} \mid CF = 0$, то μ не имеет точечных нагрузок: $|\mu|(\{a\}) = 0$ $(a \in \boldsymbol{T})$.*

Доказательство. Покажем, что если μ удовлетворяет условию теоремы, то $|\mu|(\{1\}) = 0$. Пусть σ — малое положительное число, $\psi_\sigma \in C^\infty(T)$, $\psi_\sigma \equiv 1$ на некоторой открытой дуге, содержащей 1, $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \psi_\sigma < \sigma$, $0 \leqslant \psi_\sigma \leqslant 1$. Тогда при $\lambda \in \boldsymbol{Z}$

$$|C_\lambda^\sigma| \overset{\text{def}}{=} |\int_T \bar{\zeta}^\lambda \psi_\sigma \, d\mu| = |\mu(\{1\} + \int_T \bar{\zeta}^\lambda \psi_\sigma \cdot d(\mu - \mu(\{1\})\delta_1)| \geqslant |\mu(\{1\})| -$$

$$- |\mu|(\operatorname{supp} \psi_\sigma \setminus \{1\})_{\sigma \to +0} \to |\mu(\{1\})|.$$

Если $\mu(\{1\}) \neq 0$, то можно выбрать $\sigma = \sigma^*$ так, что при всех $\lambda \in \boldsymbol{Z}$ $|C_\lambda^{\sigma^*}| \geqslant \frac{|\mu(\{1\})|}{2}$.

С другой стороны, при любом $\lambda \in \boldsymbol{Z}$

$$|c_\lambda^{\sigma^*}| = |\int_{\boldsymbol{T}} \bar{\zeta}^\lambda \sum_j \hat{\psi}_{\sigma^*}(-j) \bar{\zeta}^j \, d\mu| = |\sum_{j \in \boldsymbol{Z}} \hat{\psi}_{\sigma^*}(-j) \hat{\mu}(j + \lambda)|.$$

Поместим теперь λ в центр какой-нибудь лакуны: $\lambda = \lambda_k \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{n_k + n'_k}{2}\right]$; получим

$$|c_{\lambda_k}^{\sigma^*}| \leqslant \operatorname{var} \mu \cdot \sum_{j \notin [n_k - \lambda_k, \, n'_k - \lambda_k]} |\hat{\psi}_{\sigma^*}(-j)| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

так как $\sum\limits_{j \in Z} |\hat{\psi}(-j)| < \infty$ (в силу гладкости функции ψ). Это противоречит неравенству $|c_{\lambda_k}| \geqslant \frac{|\mu(\{1\})|}{2}$.

Замечание 2. Этот способ рассуждения легко обобщается на заряды в $\boldsymbol{R}$ и даже в $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{T}^n$. Условие лакунарности будет состоять в существовании шаров сколь угодно большого диаметра, свободных от $\hat{\mu}$.

В заключение заметим, что R-множества и множества, о которых говорилось в теореме 2, играют некоторую роль в задачах «свободной интерполяции». Для примера приведем следующее

Предложение 2. *Пусть множество $F \subset N$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы (с $n_k, n'_k \in N$). Пусть E — замкнутое счетное множество на окружности $\boldsymbol{T}$. Какова бы ни была функция $f \in C(E)$, существует g, принадлежащая диск-алгебре A и такая, что $g \mid E = f$, $\check{g} \mid F = 0$.*

Доказательство легко следует из комбинации теоремы 2 с известной теоремой Бишопа [7, с. 140].

Аналогичное предложение можно доказать применительно к R-множествам.

Следствие 2. Пусть F и E — те же, пусть $b \in l^1(F)$, $f \in C(E)$. Тогда существует функция g, принадлежащая диск-алгебре и такая, что $g \mid E = f$, $\hat{g} \mid F = b$. Для доказательства нужно рассмотреть функцию $\psi = \sum_{k \in F} b_k \zeta^k \in A$, затем построить функцию $g_1 \in A$ такую, что $g_1 \mid E = f - \psi \mid E$, $\hat{g}_1 \mid F = 0$ и, наконец, положить $g = \psi + g_1$. Множеством единственности будем называть всякое множество $F \subset \boldsymbol{Z}$, обладающее следующим свойством: каковы бы ни были заряд μ на окружности $\boldsymbol{T}$ и множество $E \subset \boldsymbol{T}$,

$$\operatorname{mes} E > 0 \mid \mu \mid (E) = 0 \text{ и } \hat{\mu} \mid CF = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$

Основным для нас примером множества единственности будет служить $F = \boldsymbol{Z}_-$. Другие же примеры (относящиеся не только к зарядам) можно найти в [2, с. 710, 3, с. 181, 5].

Теорема 3. *Пусть $F \subset \boldsymbol{Z}$. Предположим, что при некотором натуральном k и при любом натуральном M множество F содержится в пересечении*

$$\bigcap_{l \in CQ_M} (\Pi_M^l \cup P_M^l), \tag{2}$$

где при любом $l \in CQ_M$, Π_M^l — M-редкая k-решетка, $l \notin \Pi_M^l$, P_M^l, Q_M — множества единственности. Тогда и F есть множество единственности.

Доказательство опирается на следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть $E \subset \boldsymbol{T}$, $\operatorname{mes} E > 0$, $s \in N$. Существует положительное число ε такое, что для любого вектора $h = (h_1, \ldots, h_s) \in \boldsymbol{R}^s$, удовлетворяющего неравенству $\sup_{1 \leqslant j \leqslant s} |h_j| < \varepsilon$,*

$$\operatorname{mes} \bigcap_{j=1}^{s} [(\exp ih_j) E] > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Мера, участвующая в (3), равна $\int_{\boldsymbol{T}} \prod_{j=1}^{s} \chi_{e^{ih_j}E} = \int_{\boldsymbol{T}} \prod_{j=1}^{s} \chi_E(\zeta e^{-ih_j}) \mid d\zeta \mid$. Остается воспользоваться непрерывностью сдвига в $L^1(\boldsymbol{T})$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $E \subset \boldsymbol{T}$, $\operatorname{mes} E > 0$, а заряд μ (на окружности $\boldsymbol{T}$) таков, что $\mid \mu \mid (E) = 0$, $\hat{\mu} \mid CF = 0$. Пусть $M \in \boldsymbol{N}$. Рассмотрим снова заряд $\gamma_l = \mu * \nu_{\Pi_M^l}$, где l — какой-нибудь элемент множества CQ_M. Воспользуемся замечанием 1 (п. 2); из него следует, что $|\gamma_l| (\bigcap_{j=1}^{2^k} e^{ih_j} E) = 0$, где $|h_j| \leqslant \frac{\pi_k}{M}$. (Множество, стоящее под знаком $|\gamma_l|$, имеет положительную меру, если M достаточно велико — см. предложение 3). Функция $\hat{\gamma}_l$ сосредоточена на множестве единственности P_M^l (см. доказательство теоремы 1), и потому $\gamma_l = 0$. Но $\hat{\nu}_{\Pi_M^l}(l) \neq 0$, так что $\hat{M}(l) = 0$ при любом $l \in CQ_M$, и $\mu = 0$, так как Q_M есть множество единственности.

С л е д с т в и е 3. Предположим, что при некотором $k \in N$ и любом $M \in N$ множество F содержится в пересечении (2), где Q_M, Π_M^l имеют прежний смысл, а множества P_M^l конечны. Тогда F есть сильное множество единственности в том смысле, что $\boldsymbol{Z}_- \cup F$ есть множество единственности.

Это следствие доказывается так же, как и следствие 1. Вместо $\boldsymbol{Z}_-$ можно было бы говорить о любом множестве единственности, которое остается множеством единственности после присоединения любого конечного множества. Мы не знаем, бывают ли множества единственности, не обладающие последним свойством.

Заметим, что наше рассуждение вместе с формулой Голузина — Крылова позволяет восстановить, например, функцию класса $L^2(\boldsymbol{T})$, для которой $\hat{f}(n) = 0$ при $n \in N \setminus F$ (F такое же, как в следствии 3), если известны ее значения на множестве $E \subset \boldsymbol{T}$ положительной меры.

Пример. Множество F примера 3 обладает следующим свойством: если заряд μ на единичной окружности таков, что $\hat{\mu} | (\boldsymbol{Z}_+ \setminus F) = 0$, то меры $|\mu|$ и mes взаимно абсолютно непрерывны.

Мы не знаем, насколько точными являются условия, налагаемые на множество F в теореме 3. Некоторые (довольно далекие от достаточных) необходимые условия дает

Теорема 4. *Пусть множество $F \subset \boldsymbol{Z}$ обладает следующим свойством: при некотором $k \in N$ и при любом M*

$$F \subset \Pi_M^k \cup P_M, \tag{4}$$

где Π_M^k — некоторая k-решетка редкости M, а P_M-конечное множество. Тогда CF есть множество неединственности в таком смысле: Каково бы ни было множество $E \subset \boldsymbol{T}$, положительной меры, найдется ненулевая функция $g \in L^2(\boldsymbol{T})$ такая, что $g | CE = 0$, $\hat{g} | F = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предложение 3, найдем столь большое $M \in N$, что

$$\operatorname{mes} E^* > 0, \quad E^* \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^{2^k} (\exp ih_j) E, \tag{5}$$

каковы бы ни были вещественные числа $h_1, \ldots, h_{2^k}$, удовлетворяющие неравенствам $|h_j| \leqslant \frac{\pi k}{M}$. Возьмем в качестве h_j занумерованные произвольным образом числа $\pi \sum_{l=1}^{k} \pm \frac{1}{n_l}$ (здесь n_l — разности арифметических прогрессий, входящих в состав решетки Π_M^k (см. замечание 1). Пусть ε — малое положительное число, $E_\varepsilon^* \subset E^*$ — множество положительной лебеговой меры, $\operatorname{diam} E_\varepsilon^* < \varepsilon$. Легко видеть, что если число ε достаточно мало, то при некотором j

$$e^{ih_j} E_\varepsilon^* \cap e^{ih_k} E_\varepsilon^* = \varnothing, \text{ если } k \neq j. \tag{6}$$

(В качестве ε можно взять, например, $\varepsilon = 2\sin\left(\pi \cdot \min\limits_{l=1,\ \ldots,\ k} \frac{1}{n_l}\right)$, в качестве h_j, $h_j = -\pi \sum\limits_{l=1}^{k} \frac{1}{n_l}$, если M — достаточно большое).

В (бесконечномерном) пространстве L^2-функций, сосредоточенных на множестве E_ε^*, найдется функция $h \not\equiv 0$, удовлетворяющая условиям $\hat{h}(j) = 0$ ($j \in P_M$), так как P_M — конечное множество. В качестве искомой функции g можно взять теперь свертку $v_{\Pi_M^k} \ast h$, где $v_{\Pi_M^k}$ — заряд с конечным носителем, соответствующий решетке Π_M^k по предложению 1. Из (6) следует, что функция g отлична от нуля по крайней мере на множестве $e^{ih_j}E_\varepsilon^*$ и тем самым $g \not\equiv 0$; функция g — конечная линейная комбинация сдвигов функции h — сосредоточена на $\bigcup_l e^{ih_l} E_\varepsilon^* \subset E$; наконец, $\hat{g}(n) = \hat{v}_{\Pi_M^k}(n)\,\hat{h}(n) = 0$, если $n \in F$ (если $n \in \Pi_M^k$, то в нуль обращается первый множитель, а если $n \in P_M$ — второй).

Для некоторых множеств F, удовлетворяющих условию (4), свойство неединственности проявляется в усиленной форме: функция $\hat{v}\,|\,CF$ оказывается «почти произвольной», когда v пробегает множество всех зарядов, сосредоточенных на множестве $E \subset \boldsymbol{T}$ положительной меры Лебега. (Это напоминает известное явление «свободной интерполяции», которому посвящен, например, обзор [6]). В следующей теореме описывается одна такая ситуация; подчеркнем, что эта теорема для нас всего лишь пример; мы не стремимся к полному выяснению условий, при которых она справедлива.

Символом N_k обозначим множество $\{j \in N : j \geqslant k\}$.

Теорема 5. *Пусть F — множество всех членов последовательности $\{n_k\}_1^\infty$ натуральных чисел, причем $n_{k+1} = 2\alpha_k n_k$ ($k = 1, 2\ \ldots$), где $\alpha_k \in N$.*

Предположим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{n_{+k1}} < \infty$. *Тогда для любого множества $E \subset \boldsymbol{T}$ с $\operatorname{mes} E > 0$ найдется такой номер k_0, что для любой последовательности $\{b_k\}_{k=k_0}^\infty \in l^1(N_{k_0})$ найдется функция $g \in L^1(\boldsymbol{T})$ такая, что $g\,|\,CE = 0$, $\hat{g}(n_k) = b_k$ ($k \geqslant k_0$).*

Доказательство. Пусть $E \subset \boldsymbol{T}$, $\operatorname{mes} E > 0$. При некотором $k_0 = k_0(E)$ построим последовательность функций $\{f_k\}_{k=k_0}^\infty$ класса $L^1(\boldsymbol{T})$, обладающую следующими свойствами:

$$f_k\,|\,CE = 0 \quad (k \geqslant k_0) \tag{7}$$

$$\sup_{k \geqslant k_0} \|f_k\|_{L^1(\boldsymbol{T})} < +\infty \tag{8}$$

$$\hat{f}_k(n_j) = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j > k, \end{cases} \quad |\hat{f}_k(n_j)| \leqslant \frac{\pi^2}{12}\frac{n_j}{n_k} < \frac{n_j}{n_k} \quad (j < k,\ k \geqslant k_0). \tag{9}$$

Допустим, что такая последовательность уже построена. Свяжем с ней оператор A, сопоставляющий каждой последовательности $\{d_k\}_{k_0}^{\infty} \in l^1(N_{k_0})$ функцию $\sum_{k=k_0}^{\infty} d_k f_k \in L^1(\boldsymbol{T})$. Ясно, что $A(l^1(N_{k_0})) \subset \subset \chi_E L^1(\boldsymbol{T})$. Оператор $\hat{A}$: $\hat{A}(d)(k) = \widehat{A(d)}(n_k)$ $(k \geqslant k_0)$ действует из l^1 в l^1:

$$\hat{A}(d)(j) = \sum_{k=j}^{\infty} \hat{f}_k(n_j)\, d_k \quad (j \geqslant k_0),\ \|\hat{A}(d)\|_{l^1} \leqslant \sum_{j=k_0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} |\hat{f}_k(n_j)|\,|d_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \sum_{k_0 \leqslant j \leqslant k} \frac{n_j}{n_k} \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \sum_{k_0 \leqslant j \leqslant k} 2^{j-k} \leqslant 2\|d\|_{l^1}.$$

Утверждение теоремы означает, что $\hat{A}$ отображает $l^1(N_{k_0})$ на $l^1(N_{k_0})$. Чтобы в этом убедиться, проверим, что $\|\hat{A} - I\| < 1$. Матрица $\hat{A} - I$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{f}_{k_0+1}(n_{k_0}) & \hat{f}_{k_0+2}(n_{k_0}) & \hat{f}_{k_0+3}(n_{k_0}) \dots \\ 0 & 0 & \hat{f}_{k_0+2}(n_{k_0+1}) & \hat{f}_{k_0+3}(n_{k_0+1}) \dots \\ 0 & 0 & 0 & \hat{f}_{k_0+3}(n_{k_0+2}) \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и

$$\|\hat{A} - I\| = \sum_{j=k_0}^{\infty} \sup_{k \geqslant j+1} |\hat{f}_k(n_j)| \leqslant \frac{\pi}{12} \sum_{j=k_0}^{\infty} \frac{n_j}{n_{j+1}} < 1, \tag{10}$$

если k_0 достаточно велико.

Осталось найти k_0 и построить функции f_k.

Если k достаточно велико $(k \geqslant k_0)$ то множество $e^{-i\frac{\pi}{2n_k}} E \cap e^{i\frac{\pi}{2n_k}} E$ содержит подмножество E_k такое, что $\operatorname{diam} E_k < 2 \cdot \sin \frac{\pi}{12 n_k}$, $\operatorname{mes} E_k > \frac{\pi}{12 n_k}$. (В качестве k_0 берем такое число, что имеет место (10) и при всех δ, $\delta < \frac{\pi}{n_{k_0}}$ существует дуга $V_\delta \subset \boldsymbol{T}$ такая, что

$$\operatorname{diam} V_\delta = 2 \sin \delta \ \text{(т. е. } \operatorname{mes} V_\delta = 2\delta\text{)}, \ \operatorname{mes}(V_\delta \setminus E) < \frac{1}{48} \operatorname{mes} V_\delta. \tag{11}$$

В качестве E_k возьмем теперь $E_k = (e^{-i\frac{\pi}{2n_k}} E) \cap (e^{i\frac{\pi}{2\pi_k}} E) \cap \tilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}}$, где $\tilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}}$ — концентрическая с $V_{\frac{\pi}{n_k}}$ дуга, $\operatorname{diam} \tilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}} = 2 \sin \frac{\pi}{12 n_k}$ $\left(\text{т. е. } \operatorname{mes} \tilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}} = \frac{\pi}{6 n_k}\right)$. Легко убедиться, что

$$\operatorname{mes} E_k \geqslant \operatorname{mes} \widetilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}} - \operatorname{mes}\{(e^{-i\frac{\pi}{2n_k}} V_{\frac{\pi}{n_k}}) \setminus (e^{-i\frac{\pi}{2n_k}} E)\} - \operatorname{mes}\{(e^{i\frac{\pi}{2n_k}} V_{\frac{\pi}{n_k}}) \setminus (e^{i\frac{\pi}{2n_k}} E)\}, \tag{12}$$

ибо $\widetilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}} \subset e^{\pm i\frac{\pi}{2n_k}} V_{\frac{\pi}{n_k}}$. Из (11) и (12) вытекает $\operatorname{mes} E_k > \frac{\pi}{12n_k}$. Положим при $k \geqslant k_0$ $f_k = c_k g_k$, где

$$g_k = \frac{n_k}{2}\,(\chi_{e^{-i\frac{\pi}{2n_k}} E_k} - \chi_{e^{i\frac{\pi}{2n_k}} E_k}),\quad c_k = \frac{1}{\hat{g}_k(n_k)}.$$

Соотношение (7) выполнено, потому что $e^{\pm\frac{\pi}{2n_k}} E_k \subset E$. Далее,

$$|\hat{g}_k(n)| = \left| \hat{\chi}_{E_k}(n) \sin \frac{n\pi}{2n_k} \right| \cdot n_k \ (n \in Z), \tag{13}$$

так что

$$\frac{1}{|C_k|} = \frac{n_k}{2\pi} \left| \int_{E_k} e^{-in_k\theta}\, d\theta \right| \geqslant \frac{n_k}{2\pi} \left| \int_{E_k} \cos n_k(\theta - \theta_k)\, d\theta \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n_k}{2\pi} \cos \frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{mes} E_k \geqslant \frac{n_k}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{12n_k} \geqslant \frac{1}{50}.$$

(Во втором неравенстве мы воспользовались тем, что $\operatorname{diam} E_k < 2\sin\frac{\pi}{12n_k}$, θ_k — центр дуги $\widetilde{V}_{\frac{\pi}{n_k}}$). Поэтому

$$\| f_k \|_{L^1(T)} \leqslant |c_k|\, n_k \cdot \operatorname{mes} E_k \leqslant 50 \cdot \frac{\pi}{6},$$

так что выполнено и (8).

Из (13) следует, что $\hat{f}_k(n_j) = 0$, если $j > k$, и что при $j < k$

$$|\hat{f}_k(n_j)| \leqslant \operatorname{mes} E_k \frac{n_j\pi}{2n_k} \cdot n_k \leqslant \frac{\pi}{6n_k} \cdot \frac{n_j\pi}{2n_k} \cdot n_k = \frac{\pi^2}{12} \frac{n_j}{n_k}.$$

Замечание. С. В. Хрущев [4] дал полное описание подмножеств окружности, обладающих свойством Хинчина — Островского по отношению к некоторым классам обобщенных функций, спектр которых сосредоточен в $\boldsymbol{Z}_-$. Используя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3, можно дополнить его результаты, обобщив их на обобщенные функции с более широким спектром.

Результаты С. В. Хрущева дают полное описание класса подмножеств окружности, способных нести заряд, коэффициенты Фурье которого на $\boldsymbol{Z}_-$ имеют заданную (достаточно правильную) мажоранту. С помощью рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4, можно добиться, чтобы коэффициенты Фурье такого заряда обращались в нуль на достаточно редкой части множества $\boldsymbol{Z}$.

Автор признателен В. П. Хавину за постоянное внимание к работе.

Список литературы: **1.** *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I. — М.: Мир, 1965. — 615 с. **2.** *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с. **3.** *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. — М.: Наука, 1964. — 267 с. **4.** *Хрущев С. В.* Проблема одновременной аппроксимации и стирание особенностей интегралов типа Коши. — Тр. МИАН СССР, т. 130, с. 124 — 195. **5.** *Михеев И. М.* О рядах с лакунами. — Мат. сб. (н. с.), 1975, 98 (140), № 4 (12), с. 538 — 563. **6** *Виноградов С. А., Хавин В. П.* Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1970, № 19, с. 6 — 54. **7.** *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с. **8.** *Rudin W.* Trigonometrical series with gaps. — I. Math. and mech., 1960, vol. 9, № 2, p. 203 — 227. **9.** *Meyer Y.* Spectres des mesures et mesures absolument continues. — Studia math., 1968, vol. 30, p. 87 — 99. **10.** *Dressler R. E., Pigno L.* On strong Riesz sets. — Coll. math., 1974, vol. 29, f. 1, p. 157 — 158. **11.** *Dressler R. E., Pigno L.* Sets of uniform convergence and strong Riesz sets. — Ann. Math., 1974, vol. 211, p. 227 — 231.

Поступила 16 декабря 1979 г.