УДК 517.521.8

Н. А. ДАВЫДОВ

K-МАТРИЦЫ, РАВНОСИЛЬНЫЕ МАТРИЦЕ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ НА МНОЖЕСТВЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная положительная K-матрица [1, с. 62—63,2]. Говорят, что матрица A, равносильная матрице средних арифметических $C = \|C_{nk}\|$ ($C_{nk} = \frac{1}{n+1}$ для $K = 0, 1, 2, \ldots, n$ и $C_{nk} = 0$ для $K > n$) на множестве ограниченных последовательностей, если из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k = S \, (S \neq \infty) \tag{1}$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k}{n+1} = S^* (S^* \neq \infty) \tag{2}$$

и, обратно, из равенства (2) следует равенство (1) для каждой ограниченной последовательности $\{S_n\}$.

В настоящей заметке мы докажем следующее предложение.

Теорема. *Если нижняя треугольная положительная K-матрица (в частности, T-матрица) $A = \|a_{nk}\|$ для $n > n_0$ удовлетворяет одновременно четырем условиям:*

$$1)\ a_{nk} \geqslant a_{nk+1} \, (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),\ a_{nn} > 0; \tag{3}$$

$$2)\ a_{nk} - a_{nk+1} \geqslant a_{n+1k} - a_{n+1k+1} \ (k = 0, 1, 2, \ldots n-1); \tag{4}$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} n \, (a_{nn} + a_{n+1\,n+1} - a_{n+1n}) > 0; \tag{5}$$

4) существует натуральное число p, не зависящее от n и такое, что

$$\lim_{n\to\infty} n a_{nn-p} > \frac{a}{2}, \tag{6}$$

где $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk}$, *то эта матрица* A *равносильная матрице средних арифметических на множестве ограниченных последовательностей.*

2. Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие два предложения.

Лемма* [2, с. 34, лемма 4]. *Пусть* $A = \|a_{nk}\|$ — *нижняя треугольная* K-*матрица, а* $B = \|b_{nk}\|$ — *нормальная* K-*матрица. Для того чтобы матрицы* A *и* B *были ограниченно равносильны, достаточно, чтобы матрица* $X = AB^{-1}$, *была* K-*матрицей, ограниченно равносильной сходимости.*

Теорема 1 [*3, теорема 1*]. *Если нижняя треугольная положительная* K-*матрица* $A = \|a_{nk}\|$ *для* $n > n_0$ *удовлетворяет одновременно двум условиям:*

а) $a_{nk} \geqslant a_{n+1k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $a_{nn} - a_{n+1n} \geqslant \alpha > 0$, где α *не зависит от* n; *б) существуют натуральное число* P *и действительное число* θ, *не зависящие от* n *и такие, что* $a_{nn-p} + a_{m-p+1} + \ldots + a_{nn} \geqslant \theta > \frac{a}{2}$, где $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk}$, *то такая матрица* A *не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.*

3. Доказательство теоремы п. 1. В качестве матрицы $B = \|b_{nk}\|$ в сформулированной в п. 2 леммы возьмем матрицу $C = \|C_{nk}\|$ средних арифметических. Тогда элементы x_{nk} матрицы $X = A \cdot B^{-1} = \|x_{nk}\|$ определяются по формуле [2, с. 35]

$$X_{nk} = (k+1)(a_{nk} - a_{nk+1}) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

Пусть элементы нижней треугольной положительной K-матрицы $A = \|a_{nk}\|$ удовлетворяют условиям (3) — (6) доказываемой теоремы.

Из условия (3) следует, что $x_{nk} \geqslant 0$ для $K = 0, 1, 2, \ldots, n$; $x_{nk} = 0$ для $k > n$, а из равенства (7) вытекает: x_{nk} при $n \to \infty$ (и фиксированном $k = 0, 1, 2, \ldots$) стремится к конечному пределу $\sum_{k=0}^{n} x_{nk} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \to a$ $(n \to \infty)$, $X = \|x_{nk}\|$ — нижняя треугольная положительная K-матрица. Из (3) вытекают такие оценки

$$a_{nn} = 0\left(\frac{1}{n}\right), \; a_{nn-g} = 0\left(\frac{1}{n}\right), \tag{8}$$

где g — фиксированное натуральное число.

Из (4) следуют неравенства $x_{nk} \geqslant x_{n+1k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, а из (4) и (8) — неравенство $x_{nn} - x_{n+1n} \geqslant \beta > 0$ $(n > n_0^1)$, где β не зависит от n, т. е. матрица $X = \|x_{nk}\|$ удовлетворяет условию а) сформулированному в п. 2 теоремы 1. Покажем, что эта матрица удовлетворяет и условию б) этой теоремы.

---

* В лемме 4 предполагается существование матрицы X такой, что $XB = A$. Для нижней треугольной K-матрицы A такая матрица X существует и она равна AB^{-1}.

Действительно, имеем $x_{nn-p}+x_{nn-p+1}+\cdots+x_{nn}=(n-p+1)\times$ $\times(a_{nn-p}-a_{nn-p+1})+(n-p+2)(a_{nn-p+1}-a_{nn-p+2})+\cdots$ $\cdots+n(a_{nn-1}-a_{nn})+(n+1)\,a_n=(n-p+1)\,a_{nn-p}+a_{nn-p+1}+$ $+a_{nn-p+2}+\cdots+a_{nn}$. Отсюда в силу (6) и (8) получаем $x_{nn-p}+$ $+x_{nn-p+1}+\cdots+x_{nn}\geqslant\theta>\frac{a}{2}\ (n>n_0'')$, где $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{nk}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}x_{nk}$ и θ не зависит от n. При $n_0=\max\{n_0', n_0''\}$ матрица $X=\|x_{nk}\|$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 1 п. 2 и, следовательно, она не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности, т. е. ограниченно равносильна сходимости. По лемме п. 2 матрица $A=\|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы, ограниченно равносильна сходимости. По лемме п. 2 матрица $A=\|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условиям доказываемой теоремы, ограниченно равносильна матрице средних арифметических. Теорема доказана.

Замечание. В работе [2] получены другие условия равносильности K-матрицы $A=\|a_{nk}\|$ матрице средних арифметических.

Список литературы: 1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.—М.: Изд-во иностр. лит., 1951.— 630 с. 2. *Давыдов Н. А.* О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов.— Укр. мат. журн., 1967, т. 19, с. 29—47. 3. *Давыдов Н. А.* Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на классах последовательностей.— Мат. заметки, 1979, т. 29, с. 13—21.

Поступила 2 марта 1978 г.