УДК 517.51

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Классическая теорема Карлемана — Островского о квазианалитических классах функций одной переменной получила глубокие обобщения на классы функций нескольких вещественных переменных, квазианалитические относительно дифференциальных операторов в частных производных (см. [1, 2], где имеется библиография по этому вопросу).

В работе В. И. Мацаева, Л. И. Ронкина [1] изучалась задача о квазианалитичности относительно общего эллиптического дифференциального оператора H порядка k с постоянными коэффициентами. В этой работе было показано, что если функция $u(x) \in C^\infty(R^N)$ удовлетворяет условиям $\|H^n u\|_{L^2(R^N)} \leqslant m_n$, $D_x^p u(0) = 0$, $|p| = 0,\ 1$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$, и последовательность $\{m_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию квазианалитичности

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)\, dr}{r^{1+k^{-1}}} = \infty, \quad T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n},$$

то $u \equiv 0$.

Результат, полученный в настоящей статье, дополняет эту теорему единственности. Ограничиваясь эллиптическими операторами второго порядка, мы рассматриваем соответствующие квазианалитические классы функций, заданных в произвольной открытой области $\Omega \subset R^N$. Оценки, выделяющие квазианалитический класс, задаются здесь, как обычно, в равномерной метрике, а не в L^2-метрике, как в [1]. Наконец, вместо условия $D^p u(0) = 0$ для любого мультииндекса p, мы требуем, чтобы на произвольной фиксированной гладкой гиперповерхности S, компактно вложенной в область Ω, выполнялись соотношения $D^p H^n u(x) = 0$, $x \in S$, $|p| = 0,\ 1$. Тот факт, что S является гиперповерхностью, здесь существенен и S не может быть, вообще говоря, заменено многообразием большей коразмерности.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть H есть эллиптический оператор второго порядка с аналитическими коэффициентами, а S — гладкая гипер-*

поверхность, вложенная в область Ω. *Тогда для того чтобы из соотношений в* Ω*

$$u \in C^\infty(\Omega),\ |D^p H^n u| \leqslant m_n,\quad D^p H^n u|_S = 0,\quad |p| = 0,\ 1,\ n = 0,\ 1,\ \ldots \tag{1}$$

следовало, что $u \equiv 0$ *в* Ω, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{m_n\}$ *удовлетворяла условию квазианалитичности*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)\,dr}{r^{3/2}} = \infty,\quad T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n}. \tag{2}$$

Для доказательства необходимости условия (2) можно заметить, что если условие (2) не выполнено, то существование финитной функции $u(x)$, удовлетворяющей соотношениям (1) следует из оценок, полученных в работе [3].

Основным шагом в доказательстве достаточности условия (2) для квазианалитичности является следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполнены соотношения (1) и (2), и* x_0 *есть произвольная точка из* S. *Тогда* $u(x) \equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* x_0.

Доказательство леммы. Введем дополнительную действительную переменную t и рассмотрим гиперболический оператор $H_1 = D_t^2 - H$. Для произвольной точки $P = (t_1,\ x_1) \in R^{N+1}$, $t_1 > 0$ через Γ_p обозначим конус прошлого с вершиной в точке P (см. [4]). Пусть $R_p(h)$ — сечение конуса Γ_p гиперплоскостью $t = h$. Подберем такую точку $P_0 \in R^{N+1}$, чтобы выполнялось включение $R_{p_0}(0) \subset \Omega$ и точка x_0 принадлежала относительной внутренности множества $R_{p_0}(0)$. Тогда, если P_1 — точка, симметричная P_0 относительно гиперплоскости $t = 0$ и $\Gamma = \Gamma_{p_0} \cup \Gamma_{p_1}$, то существуют такие положительные ε и δ, что справедливо включение $A = \{(t,\ x),\ |x - x_0| \leqslant \varepsilon,\ |t| < \delta\} \subset \Gamma$. Пусть $v(t,\ x)$ есть решение задачи Коши

$$H_1 v(t,\ x) = 0,\quad (t,\ x) \in \Gamma,\quad v(0,\ x) = u(x),\quad D_t v(0,\ x) = 0, \tag{3}$$

где $u(x)$ — функция, удовлетворяющая условию доказываемой леммы. Из теоремы о решениях гиперболических уравнений [4] следует, что решение задачи (3) существует, единственно и является бесконечно дифференцируемой в Γ функцией. Вводя оператор K, разрешающий задачу (3), положим $v = Ku$. Из энергетического неравенства для оператора H_1 [4] получаем, что для некоторой константы $b > 0$

$$\left\| D^q_{t,\,x} Ku \right\|_{L^2(A)} \leqslant b \sum_{|p| \leqslant 1} \left\| D^p_x u \right\|_{L^2(R_{p_0}(0))},\quad |q| = 0,1. \tag{4}$$

Покажем, что при выполнении (1) $HKu = KHu$ **(5)**.
Действительно, $D_t^2 HKu = HD_t^2 Ku = H^2 Ku$, $[HKu](0,x) = Hu(x)$,

* Из включения $H^n u \in C^2(\Omega)$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$ в этом случае вытекает, что $u \in C^\infty(\Omega)$.