УДК 517.51

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Классическая теорема Карлемана — Островского о квазианалитических классах функций одной переменной получила глубокие обобщения на классы функций нескольких вещественных переменных, квазианалитические относительно дифференциальных операторов в частных производных (см. [1, 2], где имеется библиография по этому вопросу).

В работе В. И. Мацаева, Л. И. Ронкина [1] изучалась задача о квазианалитичности относительно общего эллиптического дифференциального оператора H порядка k с постоянными коэффициентами. В этой работе было показано, что если функция $u(x) \in C^\infty(R^N)$ удовлетворяет условиям $\|H^n u\|_{L^2(R^N)} \leqslant m_n$, $D_x^p u(0) = 0$, $|p| = 0, 1$, $n = 0, 1, \ldots$, и последовательность $\{m_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию квазианалитичности

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)\, dr}{r^{1+k^{-1}}} = \infty, \quad T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{m_n},$$

то $u \equiv 0$.

Результат, полученный в настоящей статье, дополняет эту теорему единственности. Ограничиваясь эллиптическими операторами второго порядка, мы рассматриваем соответствующие квазианалитические классы функций, заданных в произвольной открытой области $\Omega \subset R^N$. Оценки, выделяющие квазианалитический класс, задаются здесь, как обычно, в равномерной метрике, а не в L^2-метрике, как в [1]. Наконец, вместо условия $D^p u(0) = 0$ для любого мультииндекса p, мы требуем, чтобы на произвольной фиксированной гладкой гиперповерхности S, компактно вложенной в область Ω, выполнялись соотношения $D^p H^n u(x) = 0$, $x \in S$, $|p| = 0, 1$. Тот факт, что S является гиперповерхностью, здесь существенен и S не может быть, вообще говоря, заменено многообразием большей коразмерности.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть H есть эллиптический оператор второго порядка с аналитическими коэффициентами, а S — гладкая гипер-*

поверхность, вложенная в область Ω. *Тогда для того чтобы из соотношений в* Ω*

$$u \in C^\infty(\Omega), \ |D^p H^n u| \leqslant m_n, \quad D^p H^n u|_S = 0, \quad |p| = 0, 1, \ n = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

следовало, что $u \equiv 0$ *в* Ω, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{m_n\}$ *удовлетворяла условию квазианалитичности*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)\, dr}{r^{3/2}} = \infty, \quad T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n}. \qquad (2)$$

Для доказательства необходимости условия (2) можно заметить, что если условие (2) не выполнено, то существование финитной функции $u(x)$, удовлетворяющей соотношениям (1) следует из оценок, полученных в работе [3].

Основным шагом в доказательстве достаточности условия (2) для квазианалитичности является следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполнены соотношения (1) и (2), и* x_0 *есть произвольная точка из* S. *Тогда* $u(x) \equiv 0$ *в некоторой окрестности точки* x_0.

Доказательство леммы. Введем дополнительную действительную переменную t и рассмотрим гиперболический оператор $H_1 = D_t^2 - H$. Для произвольной точки $P = (t_1, x_1) \in R^{N+1}$, $t_1 > 0$ через Γ_p обозначим конус прошлого с вершиной в точке P (см. [4]). Пусть $R_p(h)$ — сечение конуса Γ_p гиперплоскостью $t = h$. Подберем такую точку $P_0 \in R^{N+1}$, чтобы выполнялось включение $R_{p_0}(0) \subset \Omega$ и точка x_0 принадлежала относительной внутренности множества $R_{p_0}(0)$. Тогда, если P_1 — точка, симметричная P_0 относительно гиперплоскости $t = 0$ и $\Gamma = \Gamma_{p_0} \cup \Gamma_{p_1}$, то существуют такие положительные ε и δ, что справедливо включение $A = \{(t, x), |x - x_0| \leqslant \varepsilon, |t| < \delta\} \subset \Gamma$. Пусть $v(t, x)$ есть решение задачи Коши

$$H_1 v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Gamma, \quad v(0, x) = u(x), \quad D_t v(0, x) = 0, \qquad (3)$$

где $u(x)$ — функция, удовлетворяющая условию доказываемой леммы. Из теоремы о решениях гиперболических уравнений [4] следует, что решение задачи (3) существует, единственно и является бесконечно дифференцируемой в Γ функцией. Вводя оператор K, разрешающий задачу (3), положим $v = Ku$. Из энергетического неравенства для оператора H_1 [4] получаем, что для некоторой константы $b > 0$

$$\left\| D^q_{t,x} Ku \right\|_{L^2(A)} \leqslant b \sum_{|p| \leqslant 1} \left\| D^p_x u \right\|_{L^2(R_{p_0}(0))}, \quad |q| = 0,1. \qquad (4)$$

Покажем, что при выполнении (1) $HKu = KHu$ **(5)**.
Действительно, $D_t^2 HKu = HD_t^2 Ku = H^2 Ku$, $[HKu](0, x) = Hu(x)$,

* Из включения $H^n u \in C^2(\Omega)$, $n = 0, 1, \ldots$ в этом случае вытекает, что $u \in C^\infty(\Omega)$.

$[D_t HKu](0, x) = HD_t Ku(0, x) = 0$. Поэтому в силу теоремы единственности задачи Коши (3) выполнено соотношение (5). Аналогично, при любом натуральном n имеют место равенства

$$H^n Ku = KH^n u, \ (t, x) \in \Gamma, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Из (6) следует, что $D_t^{2n} Ku = KH^n u$, $n = 0, 1, \ldots$ Для любого дифференцирования по x порядка, не превосходящего единицы, получаем

$$D_t^{2n} D_x^p Ku = D_x^p D_t^{2n} Ku = D_x^p KH^n u, \quad |p| \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Из (4), (7) следует, что

$$\left\| D_t^{2n} D_x^p Ku \right\|_{L^2(A)} \leqslant \mathrm{const}\, m_n, \quad \left[D_t^{2n} D_x^p Ku\right](0, x) =$$
$$= D_x^p H^n u(x), \quad \left[D_t^{2n+1} D_x^p Ku\right](0, x) = 0, \ |p| = 0, 1, \ n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Применяя к функции $D_x^p Ku(t, x)$ при $x \in S$ теорему Карлемана — Островского, сформулированную для L^2-метрики (доказательство ее в этом случае ничем не отличается от классического), из соотношений (8) получим, что $D_x^p Ku(t, x) = 0$, $(t, x) \in A$, $x \in S$, $|p| = 0, 1$. Пользуясь теоремой единственности Хольмгрена (см. [4]) для оператора H_1 в A и гиперплоскости $S_1 = [-\delta, \delta] \times S \subset R^{N+1}$, нехарактеристической относительно оператора H_1, получим, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что $u(x) = Ku(0, x) = 0$ при $|x - x_0| \leqslant \varepsilon_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. *Достаточность.* Пусть выполнены соотношения (1), (2). Пользуясь леммой, получим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $u(x) \equiv 0$ при $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$. Снова пользуясь леммой, но беря в качестве гиперповерхности S сферу $|x - x_0| = \varepsilon$, получим, пользуясь компактностью сферы S, что для некоторого $\varepsilon_1 > \varepsilon$ $u(x) \equiv 0$ при $|x - x_0| \leqslant \varepsilon_1$. Поэтому $u(x) \equiv 0$ в любом шаре с центром в точке x_0, принадлежащем области Ω. Поскольку для любой точки $x \in \Omega$ существует система шаров $\{B_i\}_1^r \subset \Omega$ таких, что центр шара B_1 есть x_0, центр шара B_{i+1} лежит в шаре B_i, $i = 1, \ldots, r-1$, $r \geqslant 1$ и $x \in B_r$, то $u(x) \equiv 0$, и теорема доказана.

Замечание. Размерность многообразия S не может быть уменьшена. Действительно, если H — оператор Лапласа, $S = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N),\ x_1 = x_2 = 0\}$, $\dim S = N - 2$ и $u(x) = x_1^2 - x_2^2$, то $Hu \equiv 0$, $D^p u|_S = 0$, $|p| = 0, 1$, но $u(x) \not\equiv 0$.

Список литературы: 1. *Мацаев В. И., Ронкин Л. И.* Квазианалитические классы функций от нескольких переменных.—Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва, 1961, сер. 4, с. 49—57. 2. *Чернязский А. Г.* Об операторной квазианалитичности для функций нескольких переменных.—Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 2, с. 296—299. 3. *Хрыптун В. Г.* О необходимых условиях операторной квазианалитичности.— Диф. уравнения, 1969, т. 5, № 9, с. 1690—1699. 4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.— 330 с.

Поступила 20 октября 1979 г.