УДК 517.547.3

Н. М. БЛАНК, И. В. ОСТРОВСКИЙ

О РОСТЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

1°. В работе [1] один из авторов доказал следующую теорему.

Теорема А. *Обозначим через* K *класс функций* $f(z)$, *аналитических в круге* $|z|<1$ *и удовлетворяющих условию*

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\ln M(r, f)}{1-r}}\, dr < \infty \quad (M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|).$$

Предположим, что аналитические в круге $|z|<1$ *функции* $g_1(z), \ldots, g_n(z)$; $h_0(z), h_1(z), \ldots, h_n(z)$ *удовлетворяют условиям:*

I. *Функции* $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ *не имеют нулей.*

II. *Функции* $h_1(z)g_1(z), \ldots, h_n(z)g_n(z)$ *линейно независимы над полем* $\mathbf{C}$ *и не имеют общих нулей.*

III. *Справедливо соотношение*

$$h_0(z) = \sum_{k=1}^{n} h_k(z)\, g_k(z). \tag{1}$$

IV. *Функции* $h_0(z), h_1(z), \ldots, h_n(z)$ *принадлежат* K.

Тогда имеют место соотношения $\ln M(r, g_k) = O(1/(1-r))$, $r \to 1$, $k=1, \ldots, n$.

Эта теорема является обобщением одной теоремы Э. Ландау [2, с. 266, 443], которая получается при $n=2$, $h_0(z)=h_1(z)=h_2(z)=1$.

В настоящей статье получены оценки для $\ln M(r, g_k)$ в тех случаях, когда условие IV отброшено или заменено более слабыми.

Теорема 1. *Если функции* $g_1(z), \ldots, g_n(z)$; $h_0(z), h_1(z), \ldots, h_n(z)$ *удовлетворяют условиям I, II, III, то при* $r \in (0, 1)\setminus E$, *где множество* $E \subset (0, 1)$ *таково, что* $\int_E |d\ln(1-r)| < \infty$, *справедливы оценки* $\ln M(r, g_k) \leqslant \ln^+ M(r, h_0) + C(1-r)^{-1}\ln^2(1|(1-r))\left\{\ln^+\ln^+ M(r, h_0) + \sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(r, h_k)\right\}^4$, *где* C — *положительная постоянная.*

Теорема 2. *Если функции* $g_1(z), \ldots, g_n(z)$; $h_0(z), h_1(z), \ldots, h_n(z)$ *удовлетворяют условиям I, II, III, и, кроме того,*

$$\ln^+\ln^+ M(r, h_0) + \sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(r, h_k) = O((1-r)^{-\varepsilon}),\ \varepsilon < 1, \tag{2}$$

то при $r \to 1$, $r \in A$, *где множество* $A \subset (0, 1)$ *таково, что*

$\liminf_{r\to 1}(1-r)^{-1}\,\mathrm{mes}\left(A\cap\left(r,\frac{1}{2}(1+r)\right)\right)>0$, *справедливы оценки* $\ln M(r,\ g_k)\leqslant \ln^+ M(r,\ h_0)+O((1-r)^{-1}\ln(1|(1-r)))$.

Следствие 1. В условиях теоремы 2 справедливы оценки $(r\to 1)$ $\ln M(r,\ g_k)\leqslant \ln^+ M\left(\frac{1}{2}(1+r),\ h_0\right)+O((1-r)^{-1}\ln(1|(1-r)))$.

Следствие 2. Если условие (2) в теореме 2 дополнить условием $\ln M(r,\ h_0)=O((1-r)^{-\rho})$, $r\to 1$, $\rho>1$, то справедливы оценки $\ln M(r,\ g_k)=O((1-r)^{-\rho})$, $r\to 1$.

2°. В дальнейшем будем пользоваться стандартными обозначениями теории мероморфных функций (см., например, [3]). Буквой C условимся обозначать положительные постоянные, не зависящие от переменных, обозначенных буквами r, R, s, S (возможно, с индексами), а через E будем обозначать любое множество на (0, 1), удовлетворяющее условию $\int\limits_E |d\ln(1-r)|<\infty$.

Лемма 1. *Пусть функция* $f(z)$ *мероморфна в круге* $|z|<$ $<\Omega\leqslant\infty$. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{R-r}\int\limits_r^R \ln^+ M(t,f)\,dt\leqslant\left(\frac{CR_1}{R_1-R}\ln\frac{R_1}{R-r}\right)T(R_1,f),\ C<r<R<R_1<\Omega.$$

Неравенство является небольшим обобщением известного неравенства Неванлинны [3, с. 55], которое получается при $r=0$. Так как это обобщение не требует существенных изменений в доказательстве, то мы опустим доказательство.

Лемма 2. *Пусть функции* $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ *аналитичны в круге* $|z|<1$, *линейно независимы над полем* $\mathbf{C}$ *и не обращаются в нуль одновременно. Положим* $f_0(z)=\sum\limits_{k=1}^n f_k(z)$. *Тогда при* $R\in$ $\in(0,\ 1)\setminus E$ *справедливы оценки* $(1\leqslant k<j\leqslant n)$:

$$T(R,\ f_k\,|\,f_j)\leqslant 2\sum_{s=0}^n N(R,\ 1\,|\,f_s)+C\ln(1\,|\,(1-R)).\tag{3}$$

Неравенство (3) является простым следствием второй основной теоремы теории аналитических кривых А. Картана [4, см. также 5, с. 293], поэтому доказательство может быть опущено.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(s)$ — *положительная невозрастающая непрерывная функция на полуоси* $[s_0,\ \infty)$, *положим* $S(s)=s(1+$ $+\varphi(s))$. *Если множество* $B\subset[s_0,\ \infty)$ *имеет конечную логарифмическую меру (т. е.* $\int\limits_B d\ln r<\infty$), *то и множество* $S^{-1}(B)$ *имеет конечную логарифмическую меру.*

Доказательство. Положим $S_0(s)=\max\limits_{s_0\leqslant t\leqslant s}[t(1+\varphi(t))]$. Функция $S_0(s)$ — неубывающая, и поэтому множество D тех a, для которых $S_0^{-1}(a)$ не сводится к точке, не более чем счетно. Не уменьшая общности, будем считать, что множество B имеет вид $B = \bigcup_j (S_j, S'_j)$, $\sum_j \ln (S'_j \mid S_j) < \infty$. Можем также дополнительно предположить, расширив в случае необходимости интервалы (S_j, S'_j), что ни одно из чисел S_j, S'_j не попадает в множество D. Если $a \bar{\in} D$, то множество $S_0^{-1}(a)$ состоит из одной точки и $S_0^{-1}(a) \subset S^{-1}(a)$. Поэтому равенства $S_j = S_0(s_j)$, $S'_j = S_0(s'_j)$ однозначно определяют числа s_j и s'_j, и мы имеем $S_j = s_j(1+\varphi(s_j))$, $S'_j = s'_j(1+\varphi(s'_j))$. Очевидно, $S_0^{-1}(B) = \bigcup_j (s_j, s'_j)$ и

$$\sum_j \ln (s'_j \mid s_j) = \sum_j \ln (S'_j \mid S_j) + \sum_j \{\ln (1+\varphi(s_j)) - \ln (1+\varphi(s'_j))\}.$$

Так как функция $\varphi(s)$ невозрастающая, то второй из рядов в правой части сходится, и, следовательно, множество $S_0^{-1}(B)$ имеет конечную логарифмическую меру.

Легко видеть, что $S^{-1}(B) \subset S_0^{-1}(B) \cup Q$, где $Q = \{s : S(s) \neq S_0(s)\}$. Множество Q состоит из непересекающихся интервалов (σ_k, σ'_k) таких, что $S(\sigma_k) = S(\sigma'_k)$. Поэтому $\sum_k \ln (\sigma'_k \mid \sigma_k) = \sum_k \{\ln(1+\varphi(\sigma_k)) - \ln(1+\varphi(\sigma'_k))\}$, и логарифмическая мера множества Q также конечна.

3°. Приступим к доказательству теоремы 1, его схема в основном будет заимствована из [1].

Как и в [1], присоединив к равенству (1) еще $n-1$ равенств, полученных из (1) дифференцированием по z, придем к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kq}(z)\, g_k(z) = h_0^{(q)}(z), \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

коэффициенты которой $a_{kq}(z)$ линейно зависят от $h_k(z), \ldots, h_k^{(q)}(z)$ и полиномиально — от $\varphi'_k(z), \ldots, \varphi_k^{(q)}(z)$, где $\varphi_k(z) = \ln g_k(z)$. Так как детерминант $D(z)$ системы (4) совпадает с $\{g_1 \ldots g_n\}^{-1} \times W(h_1 g_1, \ldots, h_n g_n)$, где W — детерминант Вронского, то в силу линейной независимости функций $h_1 g_1, \ldots, h_n g_n$ имеем $D(z) \neq 0$. Решая систему (4), получим

$$g_k(z) = D_k(z)/D(z), \; k = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $D_k(z)$ линейно зависят от $h_0(z), \ldots, h_0^{(n-1)}(z)$ и полиномиально — от $h_j^{(q)}(z)$, $\varphi_j^{(t)}(z)$ $(1 \leqslant j \leqslant n,\ 0 \leqslant q \leqslant n-1,\ 1 \leqslant t \leqslant n-1)$.

4°. Оценим рост функций $D_k(z)$ и $D(z)$ через рост $h_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Предварительно заметим, что справедливы неравенства

$$\ln M(r, D_k) \leqslant \max_{0 \leqslant q \leqslant n-1} \ln^+ M(r, h_0^{(q)}) + C \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{n-1} \{\ln^+ M(r, h_j^{(q)}) + \ln^+ M(r, \varphi_j^{(q)})\}, \tag{6}$$

$$\ln M(r, D) \leqslant C \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=0}^{n-1} \{\ln^+ M(r, h_j^{(q)}) + \ln^+ M(r, \varphi_j^{(q)})\}. \tag{7}$$

Нужно оценить величины $M(r, h_j^{(q)})$, $(0 \leqslant j \leqslant n,\ \ 1 \leqslant q \leqslant n-1)$ и $M(r, \varphi_j^{(q)})$ $(1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant q \leqslant n-1)$ через $M(r, h_j)$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$.

Оценки для $M(r, h_j^{(q)})$ легко получаются из формулы Коши

$$h_j^{(q)}(z) = \frac{q!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = R - |z|} h_j(\zeta)(\zeta - z)^{-q-1}\, d\zeta,\ |z| < R < 1,$$

и имеют вид

$$M(r, h_j^{(q)}) \leqslant q!\,(R-r)^{-q} M(R, h_j),\ 0 \leqslant j \leqslant n;\ q = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Для оценки функций $\varphi_j^{(q)}(z)$ воспользуемся формулой Шварца $(|z| < R < 1)$

$$\varphi_j(z) = \ln g_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|g_j(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\, d\theta + i \operatorname{Im} \varphi_j(0).$$

Продифференцировав ее q раз, получим

$$M(r, \varphi_j^{(q)}) \leqslant \frac{q!\,2R}{(R-r)^{q+1}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\ln|g_j(Re^{i\theta})||\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2q!}{(R-r)^{q+1}} (2T(R, g_j) + C). \tag{9}$$

В силу условий II и III можно применить лемму 2 к функциям $f_j = h_j g_j$, $j = 1, \ldots, n$, и мы получим при $R \in (0, 1) \setminus E$ оценки

$$T(R, h_k g_k/(h_j g_j)) \leqslant 2 \sum_{p=0}^{n} N(R, 1/(h_p g_p)) + C \ln(1/(1-R)). \tag{10}$$

Используя свойства характеристики T и условие III, заключаем, что $T(R, g_j) \leqslant T(R, 1/g_j) + C \leqslant T(R, h_0/(h_j g_j)) + T(R, 1/h_0) + T(R, h_j) + C \leqslant T(R, 1 + \sum_{k \neq j} h_k g_k/(h_j g_j)) + T(R, h_0) + T(R, h_j) + C \leqslant \sum_{k \neq j} T(R, h_k g_k/(h_j g_j)) + T(R, h_0) + T(R, h_j) + C$. Применяя (10) и учитывая, что в силу условия I $N(R, 1/(h_p g_p)) = N(R, 1/h_p) \leqslant T(R, h_p) + C$, получим, что при $R \in (0, 1) \setminus E$ выполняется $T(R, g_j) \leqslant 2n \sum_{k=0}^{n} T(R, h_k) + C \ln(1/(1-R)) \leqslant 2n \sum_{k=0}^{n} \ln^+ M(R, h_k) + C \ln(1/(1-R))$. Подставляя в (9), будем иметь

$$M(r, \varphi_j^{(q)}) \leqslant C(R-r)^{-C} \Big\{ \sum_{k=0}^{n} \ln^+ M(R, h_k) + \ln(1/(1-R)) \Big\},$$
$$r < R \in (0, 1) \setminus E. \tag{11}$$

Из (6) — (8) и (11) следует справедливость оценок

$$\ln M(r,\ D_k) \leqslant \ln^+ M(R,\ h_0) + C\left\{\sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(R,\ h_k) + \right.$$
$$\left. + \ln\left[(R-r)(1-R)\right]^{-1},\right\} \tag{12}$$

$$\ln M(r,\ D) \leqslant C \ln^+\ln^+ M(R,\ h_0) + C\left\{\sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(R,\ h_k) + \right.$$
$$\left. + \ln\left[(R-r)(1-R)\right]^{-1}\right\}, \tag{13}$$

где $r < R \in (0,\ 1) \setminus E$.

5°. Теперь с помощью (12), (13) и равенства (5) получим оценку роста для $\ln M(r,\ g_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

При $r < R < 1$ имеем $\ln^+ M(r,\ g_k) \leqslant \frac{1}{R-r}\int\limits_r^R \ln^+ M(t,\ g_k)\, dt \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{R-r}\int\limits_r^R \ln^+ M(t,\ D_k)\, dt + \frac{1}{R-r}\int\limits_r^R \ln^+ M(t,\ 1/D)\, dt \leqslant \ln^+ M(R,$ $D_k) + \frac{1}{R-r}\int\limits_r^R \ln^+ M(t,\ 1/D)\, dt$. Применяя для оценки последнего интеграла лемму 1, получим $\ln^+ M(r,\ g_k) \leqslant \ln^+ M(R,\ D_k) +$ $+ \frac{C}{R_1 - R} \ln \frac{1}{R-r} \ln^+ M(R_1,\ D)$ $(r < R < R_1 < 1)$. Используя оценки (12), (13), будем иметь

$$\ln^+ M(r,\ g_k) \leqslant \ln^+ M(R_2,\ h_0) + C \sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(R_2,\ h_k) +$$
$$+ C \ln \frac{1}{(R_2 - R)(1 - R_2)} + \left(\frac{C}{R_1 - R} \ln \frac{1}{R-r}\right)\left\{\ln^+\ln^+ M(R_3,\ h_0) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(R_3,\ h_k) + \ln \frac{1}{(R_3 - R_1)(1 - R_3)}\right\}, \tag{14}$$

где $r < R < R_2 \in (0,\ 1) \setminus E$, $R < R_1 < R_3 \in (0,\ 1) \setminus E$.

Перейдем от интервала $0 < r < 1$ к полуоси $1 < s < \infty$ с помощью отображения $s = 1/(1-r)$. Множества E, удовлетворяющие условию $\int\limits_E |d \ln(1-r)| < \infty$, при этом переходят в множества конечной логарифмической меры, которые будем обозначать через B. Обозначим через $M_1(s,\ \cdot)$ функции, в которые перейдут функции $M(r,\ \cdot)$, а через S, S_1, S_2, S_3 — образы точек R, R_1, R_2, R_3 соответственно. Неравенство (14) переходит в неравенство

$$\ln^+ M_1(s,\ g_k) \leqslant \ln^+ M_1(S_2,\ h_0) + C\sum_{k=1}^{n} \ln^+ M_1(S_2,\ h_k) + $$
$$+ C\ln\frac{S_2^2 S}{S_2 - S} + \left(\frac{CS_1 S}{S_1 - S}\ln\frac{Ss}{S-s}\right)\Big\{\ln^+\ln^+ M_1(S_3,\ h_0) + $$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \ln^+ M_1(S_3,\ h_k) + \ln\frac{S_3^2 S_1}{S_3 - S_1}\Big\}, \tag{15}$$

где $s < S < S_2 \in [1,\ \infty)\setminus B$, $S < S_1 < S_3 \in [1,\ \infty)\setminus B$. Положим $u_1(s) = \ln^+ M_1(s,\ h_0) + Cs\sum_{k=1}^{n} \ln^+ M_1(s,\ h_k)$, $u_2(s) = \ln^+\ln^+ M_1(s,$ $h_0) + C\sum_{k=1}^{n} \ln^+ M_1(s,\ h_k)$. Эти функции непрерывны, не убывают и, можно считать, неограничены (в противном случае утверждение теоремы 1 следует из теоремы А). Поэтому обе функции удовлетворяют условиям следующей теоремы, представляющей простое следствие теоремы Бореля — Неванлинны [3, с. 120, 121]. Пусть $u(s)$ — непрерывная неубывающая неограниченная функция на полуоси $[s_0,\ \infty]$, положим $S(s;\ u) = s\{1 + 1/(u(s)\ln^2 u(s))\}$. Тогда для всех $s \in [s_0,\ \infty)$, за исключением, возможно, некоторого множества конечной логарифмической меры, выполняется $u(S(s;\ u)) \leqslant$ $\leqslant u(s) + 1$ **(16)**.

Заметим, что к функциям $S(s;\ u_j)$, $j = 1,\ 2$, можно применить лемму 3. В силу этой леммы существует множество B_0 конечной логарифмической меры такое, что при $s \overline{\in} B_0$ выполняется $S(s;$ $u_j) \overline{\in} B$, где B — исключительное множество в неравенстве (15). Поэтому, считая, что $s \overline{\in} B_0$, можно в (15) положить $S_2 = S(s;\ u_1)$, $S_3 = S(s;\ u_2)$ и воспользоваться (16) с $u = u_j$, $j = 1,\ 2$. Положим также $S = \frac{1}{2}(S_2 + s)$, $S_1 = \frac{1}{2}(S + S_3)$ и заметим, что $S_2 - S =$ $= S - s = \frac{1}{2}(S_2 - s) = \frac{1}{2}s/(u_1(s)\ln^2 u_1(s))$, а так как $u_2(s) =$ $= o(u_1(s))$, $s \to +\infty$, то при достаточно больших s имеем $S_2 \leqslant$ $\leqslant S_3 \leqslant 2s$, $S_1 - S = S_3 - S_1 = \frac{1}{2}(S_3 - S) \geqslant \frac{1}{2}(S_3 - S_2) = \frac{1}{2} \times$ $\times s/(u_2(s)\ln^2 u_2(s)) - \frac{1}{2}s/(u_1(s)\ln^2 u_1(s)) > \frac{1}{4}s/(u_2(s)\ln^2 u_2(s))$. Мы приходим к выводу, что неравенство (15) влечет справедливость при $s \overline{\in} B_0$ неравенства $\ln M_1(s,\ g_k) \leqslant u_1(s) + C\ln(s^2 u_1(s)\ln^2 u_1(s)) +$ $+ Csu_2(s)\ln^2 u_2(s)\ln(su_1(s)\ln^2 u_1(s))\{u_2(s) + \ln(s^2 u_2(s)\ln^2 u_2(s))\} + C$. Так как $\ln u_1(s) = O(u_2(s) + \ln s)$, отсюда получаем при $s \overline{\in} B_0$ $\ln M_1(s,\ g_k) \leqslant u_1(s) + Csu_2(s)\ln^2 u_2(s)(u_2(s) + \ln s)^2$. Учитывая, что $u_1(s) \leqslant \ln M_1(s,\ h_0) + su_2(s)$, будем иметь $\ln M_1(s,\ g_k) \leqslant$ $\leqslant \ln M_1(s,\ h_0) + (Cs\ln^2 s)\,u_2^4(s)$, $s \overline{\in} B_0$. Возвращаясь от переменной s к переменной $r = 1 - s^{-1}$, получаем доказываемое неравенство.

6°. Доказательство теоремы 2. Мы находимся в условиях теоремы 1, поэтому можем пользоваться оценками (12), (13) и равенством (5), в силу которого имеем

$$\ln M(r, g_k) \leqslant \ln M(r, D_k) + \ln M(r, 1/D). \tag{17}$$

Переходя в (12) от переменных r, R к переменным $s = 1/(1-r)$ и $S = 1/(1-R)$, заключаем с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в 5°, что при $r \in (0, 1) \setminus E$ выполняется

$$\ln M(r, D_k) \leqslant \ln^+ M(r, h_0) + C\{\ln^+\ln^+ M(r, h_0) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \ln^+ M(r, h_k) + C \ln(1/(1-r))\}. \tag{18}$$

Для оценки величины $\ln M(r, 1/D)$ применим следующую теорему Линдена [6, с. 238]. Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ аналитична в круге $|z| < 1$ и $\ln M(r, f) \leqslant C(1-r)^{-\varepsilon}$, $\varepsilon < 1$. Тогда существуют положительные постоянные K, L и число ρ_0, $0 < \rho_0 < 1$, такие, что для любого ρ, $\rho_0 < \rho < 1$, интервал $\left(\rho, \frac{1}{2}(1+\rho)\right)$ содержит множество значений r лебеговой меры не меньше $L(1-\rho)$, на котором $\ln M(r, 1/f) \leqslant \frac{K}{1-r} \ln \frac{1}{1-r}$.

Так как, полагая в (13) $R = \frac{1}{2}(1+r)$ и используя условие (2), получаем $\ln M(r, D) \leqslant C(1-r)^{-\varepsilon}$, то условия теоремы Линдена выполнены для функции $f(z) = D(z)$. Поэтому из (17), (18) и (2) вытекает, что $\ln M(r, g_k) \leqslant \ln^+ M(r, h_0) + \frac{C}{1-r} \ln \frac{1}{1-r}$, когда $r \to 1$, оставаясь в некотором множестве A таком, что $\operatorname{mes}\left[A \cap \left(r, \frac{1}{2}(1+r)\right)\right] > L(1-r)$. Теорема доказана.

7°. Чтобы получить из теоремы 2 следствие 1, достаточно заметить, что если $r \,\overline{\in}\, A$, то, беря $r' \in A \cap \left(r, \frac{1}{2}(1+r)\right)$, будем иметь $\ln M(r, g_k) \leqslant \ln M(r', g_k) \leqslant \ln^+ M(r', h_0) + \frac{C}{1-r'} \ln \frac{1}{1-r'} \leqslant$ $\leqslant \ln^+ M\left(\frac{1}{2}(1+r), h_0\right) + \frac{C}{1-r} \ln \frac{1}{1-r}$. Следствие 2 вытекает из следствия 1 непосредственно.

8°. *Замечание*. Если дополнительно к условиям теоремы 1 предположить, что $\ln M(r, h_k) \leqslant C(1-r)^{-\rho}$, $\rho > 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$ **(19)**, то справедливы оценки $\ln M(r, g_k) \leqslant C(1-r)^{-\rho}$, $k = 1, \ldots, n$.

Для доказательства положим в (12), (13) $R = \frac{1}{2}(1+r)$. Используя условия (19), получим $\ln M(r, D_k) \leqslant C(1-r)^{-\rho}$, $\ln M(r, D) \leqslant$ $\leqslant C(1-r)^{-\rho}$. Остается воспользоваться (5) и следующим результатом В. И. Мацаева и Е. З. Могульского [7, с. 87]. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ голоморфны в круге $|z|<1$ и удовлетворяют условиям $\ln M(r, f_j) \leqslant C(1-r)^{-\rho}$, $\rho>1$, $j=1, 2$. Если функция $g(z)=f_1(z)/f_2(z)$ голоморфна при $|z|<1$, то $\ln M(r, g) \leqslant C(1-$ $-r)^{-\rho}$.

9°. В работе [1] теорема А приведена в формально более общем, но, очевидно, эквивалентном виде: в условии IV предположено, что функции $h_0(z)$, $h_1(z), \ldots, h_n(z)$ лишь являются отношениями функций из K. Аналогичные формальные обобщения можно указать для результатов настоящей статьи.

Список литературы: 1. *Островский И. В.* Об одном классе функций ограниченной вариации на прямой, определяемых своими значениями на полупрямой.— Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 86, с. 118—128. 2. 7.*Голубев В. В.* Однозначные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1961.—455с. 3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с. 4. *Cartan H.* Sur les zéros des combinaisons linèaires de p fonctions holomorphes donnèes. Mathematica (Cluji), 1933, vol. 7, p. 5—31. 5. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений.— В кн.: Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960, с. 263—300. 6. *Linden C. N.* The minimum modulus of functions of slow growth in the unit disk. Mathematical Essays dedicated to A. —J. Macintyre. New York, 1970, p. 237—246. 7. *Мацаев В. И., Могульский Е. З.* Теорема деления для аналитических функций с заданной мажорантой и некоторые ее приложения.—Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1976. т. 56, с. 73—89.

Поступила 29 октября 1979 г.