

Т. А. АХИЕЗЕР

О ТРЕУГОЛЬНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Согласно классической теореме¹, каждая квадратичная форма, матрица которой имеет ненулевые угловые главные миноры, может быть приведена к каноническому виду некоторым треугольным преобразованием (метод Якоби). Естественно возникает вопрос о классификации квадратичных форм относительно группы треугольных преобразований в „вырожденном“ случае, т. е. в случае обращения в 0 некоторых угловых миноров. Такая классификация и построение соответствующего канонического вида является предметом этой статьи.

Рассмотрим комплексные квадратичные формы от n переменных. Группу невырожденных треугольных матриц n -го порядка обозначим $T(n)$.

Определение. Будем считать, что квадратичная форма $A(x; x)$ имеет канонический вид, если элементы ее матрицы равны 0 или 1, причем в каждой строке (и, следовательно, в силу симметрии в каждом столбце) не более одного ненулевого элемента.

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис в пространстве столбцов. Тогда на операторном языке наше определение означает, что при каждом $i=1, \dots, n$ столбец Ae_i равен 0, или $Ae_i = e_k$ с некоторым k . Здесь A — матрица (симметрическая) формы.

Теорема. *Всякая квадратичная форма некоторым преобразованием из $T(n)$ может быть приведена к каноническому виду, который определен однозначно. Однозначность понимается в том смысле, что две эквивалентные формы, имеющие канонический вид, равны.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу переменных. Предположим, что мы уже умеем приводить к каноническому виду квадратичные формы от $n-1$ переменной. Рассмотрим форму

$$A(x; x) = \sum_{i, j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j.$$

¹ Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Гостехиздат, 1948. — 204 с.

Если $\alpha_{11} \neq 0$, то поступим так, как в методе Лагранжа, а именно с помощью преобразования

$$y_1 = \sqrt{\alpha_{11}}x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}}}x_2 + \dots + \frac{\alpha_{1n}}{\sqrt{\alpha_{11}}}x_n,$$

$$y_2 = x_2,$$

$$\dots$$

$$y_n = x_n$$

перейдем к новому базису, в котором форма будет иметь вид $y_1^2 + \varphi(y_2, \dots, y_n)$. После этого задача сведется к меньшему числу переменных. Теперь рассмотрим случай $\alpha_{11} = 0$. Пусть α_{1v} — первый ненулевой элемент в первой строке. Выделим в нашей квадратичной форме все элементы, содержащие x_1 и x_v ,

$$A(x; x) = 2 \sum_{j=v}^n \alpha_{1j}x_1x_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq v}}^n \alpha_{vj}x_vx_j + \alpha_{vv}x_v^2 + \psi(x_2, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_n).$$

Введем новые переменные y_1, \dots, y_n так, чтобы форма приняла вид $2y_1y_v + \varphi(y_2, \dots, y_{v-1}, y_{v+1}, \dots, y_n)$. А именно, положим

$$y_1 = x_1 + \xi_{12}x_2 + \dots + \xi_{1n}x_n,$$

$$y_2 = x_2,$$

$$\dots$$

$$y_{v-1} = x_{v-1},$$

$$y_v = \xi_{vv}x_v + \dots + \xi_{vn}x_n,$$

$$y_{v+1} = x_{v+1},$$

$$\dots$$

$$y_n = x_n,$$

где ξ_{ij} определяются из условия $2 \sum_{j=v}^n \alpha_{1j}x_1x_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq v}}^n \alpha_{vj}x_vx_j + \alpha_{vv}x_v^2 + \omega(x_2, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_n)$. Приравняем коэффициенты в членах, содержащих x_1 , $2 \sum_{j=v}^n \alpha_{1j}x_1x_j = 2 \sum_{j=v}^n \xi_{vj}x_jx_1$. Отсюда получаем $\xi_{vj} = \alpha_{1j}$ ($j = v, \dots, n$) (1). Приравниваем коэффициенты в членах, содержащих x_v , $\alpha_{vj} = \xi_{1j}\xi_{vv}$ ($j = 2, \dots, v-1$) (2), $\alpha_{vv} = 2\xi_{1v}\xi_{vv}$ (3), $\alpha_{vj} = \xi_{1j}\xi_{vv} + \xi_{1v}\xi_{vj}$ ($j = v+1, \dots, n$) (4). Из (1) и (2) $\xi_{1j} = \frac{\alpha_{vj}}{\alpha_{1v}}$ ($j = 2, \dots, v-1$).

Из (1) и (3) $\xi_{1v} = \frac{\alpha_{vv}}{2\alpha_{1v}}$.

Из (1) и (4) $\xi_{1j} = \frac{1}{\alpha_{1v}} \left(\alpha_{vj} - \frac{\alpha_{vv}}{2\alpha_{1v}} \alpha_{1j} \right)$ ($j = v+1, \dots, n$).

Итак, требуемое преобразование найдено. Тем самым задача снова свелась к меньшему числу переменных (для формы $\varphi(y_2, \dots, y_{v-1}, y_{v+1}, \dots, y_n)$). Осталось доказать, что никакие две различные квадратичные формы, имеющие канонический вид, не эквивалентны. Предположим, что это не так и что найдутся квадратичные формы с матрицами A и B описанной выше структуры, причем $A \neq B$, и для некоторой невырожденной верхнетреугольной матрицы T $T'AT = B$ (5), где T' — транспонированная матрица. Обозначим $T' = P$, $T^{-1} = Q$, тогда (5) переписывается в виде $PA = BQ$ (6). Покажем, что если A и B указанного вида, то равенство (6) невозможно ни при каких P нижнетреугольной и Q верхнетреугольной невырожденных матрицах.

Предположим противное. Тогда найдутся такие матрицы A, B, P, Q с указанными свойствами, что выполнено (6), т. е. $PAe_i = BQe_i$ ($i = 1, \dots, n$), где $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис в пространстве столбцов. Пусть j — первый номер, для которого $Ae_j \neq Be_j$. Возможны два случая: 1) $Ae_j = 0$ и 2) $Ae_j = e_k$ при некотором k : если $Ae_j = 0$, то $BQe_j = 0$, т. е. $B(q_{1j}e_1 + \dots + q_{jj}e_j) = 0$ ($q_{jj} \neq 0$), где q_{ij} — элементы матрицы Q . Перепишем иначе $(q_{1j}Be_1 + \dots + q_{j-1j}Be_{j-1}) + q_{jj}Be_j = 0$. Из этого равенства и структуры матрицы B следует, что $Be_j = 0$, но $Ae_j \neq Be_j$ по предположению. Получили противоречие.

Во втором случае, т. е. при $Ae_j = e_k$ $Pe_k = (q_{1j}Be_1 + \dots + q_{j-1j}Be_{j-1}) + q_{jj}Be_j$.

Первое слагаемое правой части можно переписать так: $q_{1j}Ae_1 + \dots + q_{j-1j}Ae_{j-1}$.

Левую часть представим в виде $p_{kk}e_k + (p_{k+1k}e_{k+1} + \dots + p_{nk}e_n)$.

Следовательно, $p_{kk}e_k + (p_{k+1k}e_{k+1} + \dots + p_{nk}e_n) = (q_{1j}Ae_1 + \dots + q_{j-1j}Ae_{j-1}) + q_{jj}Be_j$. А так как $Ae_i \neq e_k$ ($i = 1, \dots, j-1$) в силу свойств матрицы A , и $Be_j \neq e_k$ по предположению, то $p_{kk} = 0$. Но P — невырожденная треугольная матрица. Поэтому получено противоречие. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. В вещественном случае (т. е. матрицы преобразования вещественные) канонический вид будет отличаться лишь тем, что коэффициенты при квадратах переменных могут быть ± 1 .

Замечание 2. Аналогичный результат получим, если рассматривать классификацию квадратичных форм относительно группы унитарных матриц (треугольных с единицами на диагонали), которая является подгруппой $T(n)$. Канонический вид относительно таких преобразований будут иметь формы, матрицы которых в любой строке (столбце) содержат не более одного ненулевого элемента. Доказательство с незначительными изменениями переносится на этот случай.

В заключение приношу благодарность Г. Р. Белицкому.

Поступила 15 июня 1979 г.