УДК 519.48

Т. А. АХИЕЗЕР

# О ТРЕУГОЛЬНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Согласно классической теореме[1], каждая квадратичная форма, матрица которой имеет ненулевые угловые главные миноры, может быть приведена к каноническому виду некоторым треугольным преобразованием (метод Якоби). Естественно возникает вопрос о классификации квадратичных форм относительно группы треугольных преобразований в „вырожденном" случае, т. е. в случае обращения в 0 некоторых угловых миноров. Такая классификация и построение соответствующего канонического вида является предметом этой статьи.

Рассмотрим комплексные квадратичные формы от $n$ переменных. Группу невырожденных треугольных матриц $n$-го порядка обозначим $T(n)$.

Определение. *Будем считать, что квадратичная форма $A(x; x)$ имеет канонический вид, если элементы ее матрицы равны 0 или 1, причем в каждой строке (и, следовательно, в силу симметрии в каждом столбце) не более одного ненулевого элемента.*

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ — стандартный базис в пространстве столбцов. Тогда на операторном языке наше определение означает, что при каждом $i=1,\ldots, n$ столбец $Ae_i$ равен 0, или $Ae_i = e_k$ с некоторым $k$. Здесь $A$ — матрица (симметрическая) формы.

**Теорема.** *Всякая квадратичная форма некоторым преобразованием из $T(n)$ может быть приведена к каноническому виду, который определен однозначно. Однозначность понимается в том смысле, что две эквивалентные формы, имеющие канонический вид, равны.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу переменных. Предположим, что мы уже умеем приводить к каноническому виду квадратичные формы от $n-1$ переменной. Рассмотрим форму

$$A(x; x) = \sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j.$$

---

[1] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. — М.: Гостехиздат, 1948. — 204 с.

Если $\alpha_{11} \neq 0$, то поступим так, как в методе Лагранжа, а именно с помощью преобразования

$$y_1 = \sqrt{\alpha_{11}} x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{\alpha_{11}}} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1n}}{\sqrt{\alpha_{11}}} x_n,$$
$$y_2 = x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = x_n$$

перейдем к новому базису, в котором форма будет иметь вид $y_1^2 + \varphi(y_2, \ldots, y_n)$. После этого задача сведется к меньшему числу переменных. Теперь рассмотрим случай $\alpha_{11} = 0$. Пусть $\alpha_{1\nu}$ — первый ненулевой элемент в первой строке. Выделим в нашей квадратичной форме все элементы, содержащие $x_1$ и $x_\nu$,

$$A(x; x) = 2 \sum_{j=\nu}^{n} \alpha_{1j} x_1 x_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq \nu}}^{n} \alpha_{\nu j} x_\nu x_j + \alpha_{\nu\nu} x_\nu^2 + \psi(x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n).$$

Введем новые переменные $y_1, \ldots, y_n$ так, чтобы форма приняла вид $2y_1 y_\nu + \varphi(y_2, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_n)$. А именно, положим

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \xi_{12} x_2 + \cdots + \xi_{1n} x_n, \\ y_2 &= x_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{\nu-1} &= x_{\nu-1}, \\ y_\nu &= \xi_{\nu\nu} x_\nu + \cdots + \xi_{\nu n} x_n, \\ y_{\nu+1} &= x_{\nu+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= x_n, \end{aligned}$$

где $\xi_{ij}$ определяются из условия $2 \sum_{j=\nu}^{n} \alpha_{1j} x_1 x_j + 2 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq \nu}}^{n} \alpha_{\nu j} x_\nu x_j + \alpha_{\nu\nu} \times$ $\times\, x_\nu^2 = 2(x_1 + \xi_{12} x_2 + \cdots + \xi_{1n} x_n)(\xi_{\nu\nu} x_\nu + \cdots + \xi_{\nu n} x_n) + \omega(x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$. Приравняем коэффициенты в членах, содержащих $x_1$, $2 \sum_{j=\nu}^{n} \alpha_{1j} x_1 x_j = 2 \sum_{j=\nu}^{n} \xi_{\nu j} x_j x_1$. Отсюда получаем $\xi_{\nu j} = \alpha_{1j}$ $(j = \nu, \ldots, n)$ **(1)**. Приравниваем коэффициенты в членах, содержащих $x_\nu$, $\alpha_{\nu j} = \xi_{1j} \xi_{\nu\nu}$ $(j = 2, \ldots, \nu - 1)$ **(2)**, $\alpha_{\nu\nu} = 2\xi_{1\nu}\xi_{\nu\nu}$ **(3)**, $\alpha_{\nu j} = \xi_{1j}\xi_{\nu\nu} + \xi_{1\nu}\xi_{\nu j}$ $(j = \nu + 1, \ldots, n)$ **(4)**. Из (1) и (2) $\xi_{1j} = \frac{\alpha_{\nu j}}{\alpha_{1\nu}}$ $(j = 2, \ldots, \nu - 1)$.

Из (1) и (3) $\xi_{1\nu} = \frac{\alpha_{\nu\nu}}{2\alpha_{1\nu}}$.

Из (1) и (4) $\xi_{1j} = \frac{1}{\alpha_{1\nu}} \left( \alpha_{\nu j} - \frac{\alpha_{\nu\nu}}{2\alpha_{1\nu}} \alpha_{1j} \right)$ $(j = \nu + 1, \ldots, n)$.