УДК 519.21

И. П. ТРУХИНА

АРИФМЕТИКА СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ МЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 1. Введение. Будем использовать обозначения и определения, принятые в книге [1, гл. X]. Обозначим L_n ($n = 3, 4, \ldots$) множество вероятностных мер на группе $SH(n)$ гиперболических вращений псевдоевклидова пространства $E_{n-1,1}$, двусторонне инвариантных относительно подгруппы $SO(n-1)$ вращений $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Свертка мер из L_n определяется формулой

$$(l_1 * l_2)(E) = \int_{SH(n)} l_1(Eg^{-1})\, l_2(dg).$$

Множество L_n является топологической полугруппой относительно операции свертки и топологии слабой сходимости. Множество

L_n можно рассматривать как множ ество вероятностных мер на пространстве Лобачевского Λ^{n-1}, инвариантных относительно вращений из $SO(n-1)$. Множества вероятностных мер на плоскости и в трехмерном пространстве Лобачевского, инвариантных относительно вращений, изучались в работах Ф. И. Карпелевича, В. Н. Тутубалина, М. Г. Шура [2], В. Н. Тутубалина [3] (там рассматривается иная модель пространства Лобачевского).

Каждой мере $l \in L_n$ поставим в соответствие вероятностную меру m на полуоси $[0, \infty)$, задаваемую соотношением

$$m(X) = l(B_X), \tag{1}$$

где X — борелевское подмножество полуоси $[0, \infty)$,

$$B_X = \{g \in SH(n) : \theta_{n-1}^{n-1} \in X\}$$

(здесь θ_j^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant k$) — углы Эйлера гиперболического вращения g). Соответствие, задаваемое равенством (1), является взаимно-однозначным [см. 1, гл. X, § 1]. Назовем композицией $m_1 \circ m_2$ вероятностных мер на полуоси $[0, \infty)$ меру, отвечающую в силу соотношения (1) свертке соответствующих мер на $SH(n)$. Полугруппу вероятностных мер на $[0, \infty)$ с операцией композиции обозначим $M_{(n-3)/2}$. Полугруппы L_n и $M_{(n-3)/2}$ изоморфны.

Каждой мере $m \in M_{(n-3)/2}$ поставим в соответствие функцию $f(x) = f(x, m)$, определяемую формулой

$$f(x, m) = \int_0^\infty K_r(x, t)\, m(dt), \ x \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

где $r = (n-3)/2$, функция $K_r(x, t)$ выражается через функцию Лежандра $P_\nu^r(\zeta)$ [4] следующим образом:

$$K_r(x, t) = 2^r \Gamma(1+r)(\operatorname{sh} t)^{-r} P_{-\frac{1}{2}+ix}^{(-r)}(\operatorname{ch} t). \tag{3}$$

Следующая теорема является частным случаем более общего результата Ганголли [5, с. 218]; при $n = 3{,}4$ она ранее получена в работе [2].

Теорема А. $f(x, m_1 \circ m_2) = f(x, m_1) f(x, m_2)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Будем рассматривать функции $K_r(x, t)$, определяемые формулой (3) при $r \geqslant 0$. Обозначим через F_r множество всех функций $f(x, m)$ вида (2), где m — произвольная вероятностная мера на полуоси $[0, \infty)$. Наделим F_r топологией поточечной сходимости, а множество вероятностных мер на $[0, \infty)$ — топологией слабой сходимости.

Множества F_r при $r = 0$, $1/2$ рассматривались в работах Ф. И. Карпелевича, Н. В. Тутубалина, М. Г. Шура [2] и В. Н. Тутубалина [3], а при всех $r \geqslant 0$ — в работе Р. К. Гетура [6]. Р. К. Гетур показал, что соответствие $m \to f(x, m)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, установил, что множество F_r является топологической полугруппой относительно операции умножения и топологии поточечной сходимости. Эти результаты для $r=0$, $1/2$ были ранее приведены в работе [2]. Из результатов Гетура и теоремы А следует, что топологические полугруппы $F_{(n-3)/2}$ и L_n ($n=3, 4, \ldots$) изоморфны.

В настоящей статье изучается арифметика полугруппы F_r, $r \geqslant 0$. Введем некоторые определения.

Определение 1. *Функция* $f_1(x) \in F_r$ *называется делителем функции* $f(x) \in F_r$, *если* $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, $f_2(x) \in F_r$.

Определение 2. *Функция* $f(x) \in F_r$ *называется неразложимой, если она отлична от тождественной единицы и из равенства* $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ *где* $f_1(x)$, $f_2(x) \in F_r$, *следует, что одна из функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *тождественно равна единице.*

Определение 3. *Функция* $f_1(x) \in F_r$ *называется безгранично делимой (б. д.), если* $f(x) = [f_k(x)]^k$, $f_k(x) \in F_r$, $k = 2, 3, \ldots$

В § 3 будут доказаны теоремы, аналогичные известным теоремам А. Я. Хинчина [7, с. 107, 119] об арифметике вероятностных распределений на прямой. В § 4—7 будет получено описание множества функций из полугруппы F_r, не имеющих неразложимых делителей. В § 8 рассматриваются неразложимые элементы полугруппы F_r.

Обозначим M_r, $r \geqslant 0$, множество вероятностных мер на полуоси $[0, \infty)$ с операцией композиции, определяемой следующим образом:

$$m = m_1 \circ m_2 \leftrightarrow f(x, m) = f(x, m_1) f(x, m_2). \tag{4}$$

В силу теоремы А при $r = (n-3)/2$ это определение совпадает с определением, данным ранее.

В дальнейшем будем рассматривать также множество зарядов на полуоси $[0, \infty)$, т. е. разностей конечных мер. Каждому заряду m в силу равенства (2) можно сопоставить функцию $f(x, m)$. Это соответствие инъективно. С помощью равенства (4) операцию $\circ$ можно распространить на множество зарядов.

§ 2. Некоторые свойства функций из полугруппы F_r. Отметим сначала некоторые свойства функции $K_r(z, t)$, определенной для $t \geqslant 0$, $r \geqslant 0$ формулой (3), которые были приведены в работе [6]. При фиксированных значениях t и r функция $K_r(z, t)$ является целой функцией переменной z. Имеют место равенства

$$K_r(z, 0) = 1, \ K_r\left(\pm i\left(r + \frac{1}{2}\right), t\right) = 1. \tag{5}$$

Выполняются неравенства

$$|K_r(z, t)| \leqslant 1, |\operatorname{Im} z| \leqslant r + \frac{1}{2}; \tag{6}$$

$$|K_r(z, t)| < 1, \ t > 0, \ |\operatorname{Im} z| < z + \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Справедливо интегральное представление [4, 3.7 (8)]:

$$K_r(z, t) = \frac{2^{r+\frac{1}{2}}\Gamma(1+r)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)(\operatorname{sh} t)^{2r}} \int_0^t \frac{\cos(zv)\,dv}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} v)^{\frac{1}{2}-r}}. \tag{8}$$

Имеет место формула [6, с. 1307]:

$$K_r(z, t_1) K_r(z, t_2) = \frac{4^r [\Gamma(1+r)]^2}{\pi\Gamma(1+2r)} \times$$
$$\times \int_0^\pi K_r(z, \operatorname{ch}^{-1}(\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 + \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 \cos v)) \sin^{2r} v\,dv. \tag{9}$$

Учитывая приведенные свойства функции $K_r(z, t)$, отметим некоторые свойства функций $f(z) \in F_r$. Из (2) и (6) следует, что

$$|f(z)| \leqslant 1, |\operatorname{Im} z| \leqslant r + \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Из (2) и (8) вытекает, что любая функция $f(z, m) \in F_r$ является с точностью до постоянного множителя характеристической функцией некоторого вероятностного распределения Φ на прямой. Если мера m не сосредоточена в нуле, то распределение Φ абсолютно непрерывно и определяется формулой

$$\Phi(dv) = C\left[\int_{|v|}^\infty \frac{(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} v)^{r-1/2}}{(\operatorname{sh} t)^{2r}} m(dt)\right] dv, \tag{11}$$

где $C > 0$ — постоянная.

Так как $K_r(z, t)$ — целая функция переменной z, то из (6) следует, что любая функция $f(z) \in F_r$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| < r + 1/2$ и непрерывна в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant r+1/2$*. Следующая теорема дает условие аналитичности функции $f(z)$ в полосе более широкой, чем полоса $|\operatorname{Im} z| < r + 1/2$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z, m)$ была аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| < R$, $R > r + 1/2$, необходимо и достаточно, чтобы при любом s, $0 \leqslant s < R - r - 1/2$, сходился интеграл*

$$\int_0^\infty \exp(st)\, m(dt).$$

Доказательство. Используя (8), убеждаемся, что если $|\operatorname{Im} z| < R$, то выполняется неравенство $|K_r(z, t) \leqslant A \exp[t(R - r - 1/2)]$, где $A > 0$ зависит только от r. Из него вытекает достаточность в теореме 1. Так как $f(z, m)$ является характеристической функцией вероятностного распределения Φ на прямой, то,

* Можно показать [6, с. 1295], что топология поточечной сходимости в F_r равносильна топологии равномерной сходимости на любом прямоугольнике вида $\{|\operatorname{Re} z| \leqslant A, |\operatorname{Im} z| \leqslant r + 1/2\}$, $A > 0$.

используя условие аналитичности характеристической функции [7, с. 36] и оценивая снизу плотность распределения Ф, заданного формулой (11), получаем необходимость.

Следствие. Для того чтобы функция $f(z, m) \in F_r$ была аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| < R$, $R > r + 1/2$, необходимо и достаточно, чтобы при $0 \leqslant s < R - r - 1/2$ выполнялось условие

$$m([t, \infty)) = O(\exp(-st)), \ t \to +\infty.$$

Следствие получается из теоремы 1 так же, как в книге [7] теорема 2.2.2. из теоремы 2.2.1.

§ 3. Аналоги теоремы А. Я. Хинчина для полугруппы F_r. В этом параграфе будет существенно использоваться теория дельфийских полугрупп Кендалла. Предполагаем известными основные понятия и результаты этой теории в объеме § 1 работы [8].

Теорема 2. *Полугруппа F_r является дельфийской.*

Из (8) следует, что $f(0) > 0$ для любой функции $f(x) \in F_r$. Определим непрерывный гомоморфизм Δ полугруппы F_r в аддитивную полугруппу неотрицательных чисел формулой $\Delta(f) = -\ln f(0)$. Используя (5) и (7), находим $\Delta(f) = 0 \leftrightarrow f(x) \equiv 1$. Теорема 2 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Множество делителей любой функции $f(x) \in F_r$ компактно.*

Утверждение леммы 1 получается из теорем Хелли и Хелли—Брея с использованием того факта, что для любой конечной меры m на полуоси $[0, \infty)$ выполняется равенство $f(i(r + 1/2), m) = m([0, \infty))$.

Лемма 2. *Если последовательность функций $f_{kq}(x) \in F_r$ ($q = 1, 2, \ldots k$; $k = 1, 2, \ldots$) такова, что $\max\limits_q \Delta(f_{kq}) \to 0$ $(k \to \infty)$, $f_{k1}(x) \ldots f_{kk}(x) \to f(x)$ $(k \to \infty)$, $f(x) \in F_r$, то $f(x)$ является б. д.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что если x принадлежит конечному сегменту, а $t \geqslant 0$, то отношение $[1 - K_r(x, t)]/[1 - K_r(0, t)]$ ограничено сверху некоторой постоянной $C > 0$. Поэтому имеем

$$1 - f_{kq}(x) = \int\limits_0^\infty [1 - K_r(x, t)]\, m_{kq}(dt) \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty [1 - K_r(0, t)]\, m_{kq}(dt) \leqslant C\Delta(f_{kq})$$

(здесь m_{kq} — меры, соответствующие функциям f_{kq}). Тогда лемма 2 вытекает из следующей теоремы, доказанной Гетуром [6].

Теорема Б [6]. *Если последовательность функций $f_{kq}(x) \in F_r$ ($q = 1, 2, \ldots q_k$; $k = 1, 2, \ldots$; $q_k \to \infty$ $(k \to \infty)$) такова, что $\max [1 - f_{kq}(x))] \to 0$ $(k \to \infty)$ равномерно на каждом конечном сегменте и $\prod\limits_q f_{kq}(x) \to f(x) \in F_r$, то $f(x)$ является б. д.*

Из теоремы 2 и теории дельфийских полугрупп Кендалла [8] вытекает, что справедливы две следующие теоремы, являющиеся аналогами теорем А. Я. Хинчина [7, с. 107, 119] об арифметике вероятностных распределений на прямой.

Теорема 3. *Любая функция $f(x) \in F_r$ представима в виде*

$$f(x) = f_0(x) \prod_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

где $f_0(x) \in F_r$ не имеет неразложимых делителей, $f_k(x)$ — неразложимые элементы полугруппы F_r.

Теорема 4. *Если функция $f(x) \in F_r$ не имеет неразложимых делителей, то она является б. д.*

§ 4. Описание класса функций, не имеющих неразложимых делителей. Схема доказательства. Следующая теорема, доказанная Гетуром [6], дает общий вид б. д. функции из F_r. При $r = 0$, $1/2$ эта теорема доказана в работе [3].

Теорема С [6]. *Для того чтобы функция $f(x)$ была безгранично делимой, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась формулой*

$$f(x) = \exp\Big\{-c\,[(r+1/2)^2 + x^2] - \\ - \int_{+0}^{\infty} [1 - K_r(x,\ t)]\, \frac{1+t^2}{t^2}\, W(dt)\Big\}, \qquad (12)$$

где $c \geqslant 0$, W — конечная мера на полуоси $(0,\ \infty)$. *Представление единственно.*

В силу теорем 4 и С необходимым условием для того, чтобы функция $f(x) \in F_r$ не имела неразложимых делителей, является представимость ее в виде (12). Необходимое и достаточное условие дает

Теорема 5. *Для того чтобы функция $f(x) \in F_r$ не имела неразложимых делителей, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась формулой*

$$f(x) = \exp\{-c\,[(r+1/2)^2 + x^2]\},\ c \geqslant 0. \qquad (13)$$

Функцию $f(x)$ вида (13) можно рассматривать как аналог характеристической функции закона Гаусса. Поэтому из теорем А и 5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие. В полугруппе L_n распределения Гаусса и только они не имеют неразложимых делителей.

Для доказательства теоремы 5 понадобятся следующие два предложения.

Предложение 1. *Если функция $f(x)$ представима в виде (12) и $W \neq 0$, то $f(x)$ имеет неразложимый делитель.*

Предложение 2. *Функция $f(x)$, представимая в виде (13), не имеет неразложимых делителей.*

Для доказательства предложения 1 будут использованы некоторые приемы работы И. В. Островского [9]. Нам понадобятся следующие четыре леммы.

Лемма 3. *Если конечные меры m_1, m_2 на полуоси $[0, \infty)$ не имеют атомов в нуле, то их композиция абсолютно непрерывна относительно меры*

$$h(dt) = (\operatorname{sh} t)^{2r+1} dt \tag{14}$$

и имеет плотность

$$p(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty T(t_1, t_2, t)\, m_1(dt_1)\, m_2(dt_2),$$

где $T(t_1, t_2, t_3)$ — функция, определенная в октанте $\{(t_1, t_2, t_3): t_1, t_2, t_3 \in (0, \infty)\}$ следующим образом: при $1 + 2\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 \operatorname{ch} t_3 - \operatorname{ch}^2 t_1 - \operatorname{ch}^2 t_2 - \operatorname{ch}^2 t_3 > 0$ она имеет вид

$$\frac{4^r [\Gamma(1+r)]^2}{\pi\Gamma(1+2r)} \frac{\left(1 + 2\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 \operatorname{ch} t_3 - \operatorname{ch}^2 t_1 - \operatorname{ch}^2 t_2 - \operatorname{ch}^2 t_3\right)^{r - \frac{1}{2}}}{\left(\operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 \operatorname{sh} t_3\right)^{2r}},$$

а при $1 + 2\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 \operatorname{ch} t_3 - \operatorname{ch}^2 t_1 - \operatorname{ch}^2 t_2 - \operatorname{ch}^2 t_3 \leqslant 0$ она равна нулю.

Лемма 4. *Пусть конечные меры m_1, m_2 на полуоси $[0, \infty)$ не имеют атомов в нуле и имеют ограниченные носители, A_1 и A_2 — сегменты, содержащие носители мер m_1 и m_2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *носитель меры $m = m_1 \circ m_2$ принадлежит сегменту $[a, b]$, где*

$$a = \inf_{t_j \in A_j} |t_1 - t_2|, \quad b = \sup_{t_j \in A_j} (t_1 + t_2);$$

б) *если $c < d - 2\tau$, где $\tau > 0$,*

$$c = \sup_{t_j \in A_j} |t_1 - t_2|, \quad d = \inf_{t_j \in A_j} (t_1 + t_2),$$

то при $t \in [c + \tau, d - \tau]$ плотность $p(t)$ меры m ограничена снизу положительной постоянной.

Пусть Q — конечная мера на полуоси $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию $Q([y; 1{,}1y]) > 0$ для некоторого $y > 0$. Обозначим через E сужение меры h, задаваемой равенством (14), на сегмент $[0{,}2y; 0{,}3y]$.

Лемма 5. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ заряд $-2\varepsilon E + (Q - \varepsilon E)^{2^\circ}$ является мерой.*

Лемма 6. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ заряд $(Q - \varepsilon E)^{3^\circ}$ является мерой.*

§ 5. Доказательство лемм 3, 4. Докажем лемму 3. Заметим, что функция T неотрицательна и симметрична по t_1, t_2, t_3. Из формулы (9) следует, что при $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ справедливо представление

$$K_r(z, t_1) K_r(z, t_2) = \int_0^\infty K_r(z, t)\, T(t_1, t_2, t)\, h(dt).$$

Полагая в нем $z = i(r + 1/2)$ и используя (5), получаем равенство

$$\int_0^\infty T(t_1,\ t_2,\ t)\, h(dt) = 1, \tag{15}$$

из которого вытекает суммируемость функции T по мере h по каждой из переменных. Тогда имеем

$$f(x,\ m_1) f(x,\ m_2) = \int_{+0}^\infty \int_{+0}^\infty K_r(x,\ t_1) K_r(x,\ t_2)\, m_1(dt_1)\, m_2(dt_2) =$$

$$= \int_0^\infty K_r(x,\ t) \left[\int_0^\infty \int_0^\infty T(t_1,\ t_2,\ t)\, m_1(dt_1)\, m_2(dt_2) \right] h(dt).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Докажем лемму 4. Согласно лемме 3 справедливо представление $m(dt) = p(t) h(dt)$, где

$$p(t) = \int_{A_1} \int_{A_2} T(t_1,\ t_2,\ t)\, m_1(dt_1)\, m(dt_2).$$

Из определения функции T следует, что $T(t_1,\ t_2,\ t) = 0$ при $t > t_1 + t_2$, $t < |t_1 - t_2|$. Поэтому справедливо утверждение «а». Кроме того, если $\tau > 0$ достаточно мало, то $T(t_1,\ t_2,\ t) \geqslant B > 0$ при $|t_1 - t_2| + \tau < t < t_1 + t_2 - \tau$, $t_1 \in A_1$, $t_2 \in A_2$. Поэтому верно утверждение «б».

§ 6. Доказательство лемм 5, 6. Докажем лемму 5. Согласно леммам 3, 4 справедливо представление $(Q \circ Q)(dt) = p_1(t) h(dt)$, где плотность $p_1(t)$ удовлетворяет неравенству

$$p_1(t) \geqslant C_1 > 0,\ t \in [0,2y;\ 1{,}9y]. \tag{16}$$

Аналогично, $(Q \circ E)(dt) = p_2(t) h(dt)$, $p_2(t) = 0$ при $t > 1{,}4y$, $t < 0{,}7y$. Функция $p_2(t)$ имеет вид

$$p_2(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty T(t_1,\ t_2,\ t)\ Q(dt_1)\, E(dt_2).$$

Интеграл в правой части последнего равенства только увеличится, если заменить меру E на меру h. Учитывая (15) и симметрию функции T, находим:

$$p_2(t) \leqslant C_2 < \infty,\ t \in (0,\ \infty). \tag{17}$$

Обозначим через $p_3(t)$ функцию, равную единице на сегменте $[0{,}2y;\ 0{,}3y]$ и нулю вне его. Имеем $(Q \circ Q - 2\varepsilon Q \circ E - 2\varepsilon E)(dt) = [p_1(t) - 2\varepsilon p_2(t) - 2\varepsilon p_3(t)] h(dt)$. Из отмеченных свойств плотностей $p_j(t)$ следует, что при $\varepsilon < C_1/(2C_2 + 2)$ выполняется неравенство $p_1(t) - 2\varepsilon p_2(t) - 2\varepsilon p_3(t) \geqslant 0$, $t > 0$. Лемма 5 доказана.

Докажем лемму 6. Из лемм 3, 4 следует, что $(Q \circ Q \circ E) \times (dt) = p_4(t) h(dt)$, где

$$p_4(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty T(t_1,\ t_2,\ t)\, Q(dt_1)\, p_2(t_2)\, h(dt_2),$$

$$p_4(t) = 0, \ t > 2{,}5y. \tag{18}$$

Применяя (15) и (17), находим

$$p_4(t) \leqslant C_3 < \infty, \ t \in (0, \ \infty). \tag{19}$$

Справедливо представление $(E \circ E \circ E)(dt) = p_5(t) h(dt)$, где

$$p_5(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty T(t_1, \ t_2, \ t) E(dt_1)(E \circ E)(dt_2).$$

Аналогично заключаем, что

$$p_5(t) = 0, \ t > 0{,}9y; \ p_5(t) \leqslant C_4 < \infty, \ t \in (0, \ \infty). \tag{20}$$

Мера $Q \circ Q \circ Q$ представима в виде $(Q \circ Q \circ Q)(dt) = p_6(t) \times \times h(dt)$, где

$$p_6(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty T(t_1, \ t_2, \ t) p_1(t_1) h(dt_1) Q(dt_2).$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$p_6(t) \geqslant C_5 > 0, \ t < 2{,}5y. \tag{21}$$

Проверим сначала (21) при дополнительном условии $t \in [0{,}8y; 2{,}5y]$. Пусть $t_2 \in [y; \ 1{,}1y]$. Из определения функции T следует, что $T(t_1, \ t_2, \ t) \geqslant C > 0$ при $\sup|t - t_2| + 0{,}1y \leqslant t_1 \leqslant \inf(t_1 + t_2) - 0{,}1y$, т. е. при $1{,}6y \leqslant t_1 \leqslant 1{,}7y$. Используя (16), получаем

$$p_6(t) \geqslant \int_{1{,}6y}^{1{,}7y} p_1(t_1) h(dt_1) \int_y^{1{,}1y} T(t_1, \ t_2, \ t) Q(dt_2) \geqslant$$

$$\geqslant C_1 C Q([y; \ 1{,}1y]) h([1{,}6y; \ 1{,}7y]) > 0.$$

Пусть теперь $t \in (0; \ 0{,}8y)$. Отметим, что при таких t и $t_2 \in [y; 1{,}1y]$ справедливы неравенства $0{,}2y \leqslant |t_2 - t| \leqslant t_2 + t \leqslant 1{,}9y$. Поэтому, используя (15) и определение функции T, получаем оценку

$$p_6(t) \geqslant \int_y^{1{,}1y} Q(dt_2) \int_{0{,}2y}^{1{,}9y} T(t_1, \ t_2, \ t) p_1(t_1) h(dt_1) \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \int_y^{1{,}1y} Q(dt_2) \int_0^\infty T(t_1, \ t_2, \ t) h(dt_1) > 0.$$

Оценка (21) доказана. Тогда имеем $(Q \circ Q \circ Q - 3\varepsilon Q \circ Q \circ E - \varepsilon^3 E \circ E \circ E)(dt) = [p_6(t) - 3\varepsilon p_4(t) - \varepsilon^3 p_5(t)] h(dt)$. Из (18)—(21) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $p_6(t) - 3\varepsilon p_4(t) - \varepsilon^3 p_5(t) \geqslant 0, \ t > 0$. Лемма 6 доказана.

§ 7. Доказательство предложений 1, 2. Докажем предложение 1. Так как $W \neq 0$, то найдется точка $y > 0$ такая, что $W([y, \ y + \delta]) > 0$ для любого $\delta > 0$. Обозначим через Q сужение меры $(1 + 1/t^2) W(dt)$ на сегмент $[y; \ 1{,}1y]$, Q_1 — сужение меры W на множество $(0; \ y) \cup (1{,}1y; \ \infty)$. Запишем $f(x)$ в виде

$$f(x) = \exp\left\{\int_0^\infty [K_r(x, \ t) - 1] Q(dt)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-C\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right]-\int\limits_{+0}^{\infty}[K_r(x,\ t)-1]\frac{1+t^2}{t^2}Q_1(dt)\right\}.$$

Функция

$$f_1(x)=\exp\left\{\int\limits_0^{\infty}[K_r(x,\ t)-1]\,Q(dt)\right\}$$

является делителем $f(x)$.

Покажем, что $f_1(x)$ имеет неразложимый делитель. Представим $f_1(x)$ в виде

$$f_1(x)=\exp\left\{\int\limits_0^{\infty}[K_r(x,\ t)-1]\,(Q-\varepsilon E)(dt)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\varepsilon\int\limits_0^{\infty}[K_r(x,\ t)-1]\,E(dt)\right\},$$

где $\varepsilon>0$, E — мера, определенная в конце § 4. Функцию

$$f_2(x)=\exp\left\{\int\limits_0^{\infty}[K_r(x,\ t)-1]\,(Q-\varepsilon E)(dt)\right.$$

запишем в виде

$$f_2(x)=e^u\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\int\limits_0^{\infty}K_r(x,\ t)\,(Q-\varepsilon E)(dt)\right]^k,$$

где $u=-(Q-\varepsilon E)([0,\ \infty))$. Функция $f_2(x)$ представима формулой (2), роль m играет заряд

$$V=e^u\left[\chi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(Q-\varepsilon E)^{k\circ}\right],$$

где χ — вероятностная мера на полуоси $[0,\ \infty)$, сосредоточенная в нуле. Поскольку любое целое $k>3$ можно представить в виде $k=2j+3q$, где j и q — целые неотрицательные числа, то

$$(Q-\varepsilon E)^{k\circ}=[(Q-\varepsilon E)^{2\circ}]^{j\circ}\circ[(Q-\varepsilon E)^{3\circ}]^{q\circ}.$$

Тогда из лемм 5, 6 вытекает, что заряд $(Q-\varepsilon E)^{k\circ}$ $(k>3)$ и, следовательно, заряд V при достаточно малом $\varepsilon>0$ являются мерами. Очевидно, $V([0,\ \infty))=1$. Поэтому $V\in M_r$. Тогда функция $f_2(x)$ принадлежит F_r и является делителем $f_1(x)$. Заряд $Q-\varepsilon E$ принимает и отрицательные значения, а в силу теоремы C представление (12) для б. д. функции единственно. Очевидно, единственность сохраняется и для зарядов. Поэтому $f_2(x)$ не является б. д. и в силу теоремы 4 имеет неразложимый делитель. Отсюда следует утверждение предложения 1.

Докажем предложение 2. В § 2 было отмечено, что каждая функция $f(x)/f(0)$, $f\in F_r$, является характеристической функцией некоторого вероятностного распределения на прямой. Функции вида (13) являются с точностью до постоянного множителя характеристическими функциями закона Гаусса. Поэтому предложение 2 следует из теоремы Крамера [7, с. 81] о разложении закона Гаусса.

Теорема 5 непосредственно следует из предложений 1, 2.

Функцию $f(x) \in F_r$, представимую в виде $f(x) = \exp\{b[K_r \times \times (x, t) - 1]\}$, $b > 0$, $t > 0$, можно рассматривать как аналог характеристической функции закона Пуассона. Из предложения 1 вытекает, что $f(x)$ имеет неразложимый делитель. Поэтому в полугруппе F_r аналог теоремы Д. А. Райкова [7, с. 175] о разложении закона Пуассона не имеет места.

В силу предложения 2 для полугруппы F_r справедлив аналог теоремы Крамера о разложении закона Гаусса.

§ 8. О неразложимых элементах полугруппы F_r. Предложение 3. *Если мера $m \in M_r$ не сосредоточена в нуле и не имеет абсолютно непрерывной части, то $f(x, m) \in F_r$ является неразложимой.*

Предложение 3 следует из леммы 3. Из предложения 3 вытекает следующая теорема, являющаяся аналогом одного результата Партасарати, Рао и Варадана [7, с. 97].

Теорема 6. *Множество неразложимых элементов полугруппы F_r плотно в F_r.*

Приношу глубокую благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и ценные замечания.

Список литературы: 1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., Наука, 1965. 588 с. 2. *Карпелевич Ф. И., Тутубалин В. Н., Шур М. Г.* Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 4, с. 432—436. 3. *Тутубалин В. Н.* О предельном поведении композиции мер в плоскости и пространстве Лобачевского.— Теория вероятности и ее применения, 1962, т. 7, вып. 2, с. 197—204. 4. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., Наука, 1965. 296 с. 5. *Gangolli P.* Isotropic infinitely-divisible measures on symmetric spaces.— Acta Math., 1964, vol. 111, p. 213-246. 6. *Getoor R. K.* Infinitely-divisible probabilities on hyperbolic plane.— Pac. J. of Math., 1961, vol. 11, No 4, p.1287-1308. 7. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов М., Наука, 1972. 480 с. 8. *Kendall D.* Delphic semigroups, infinitely-divisible regenerative phenomena and the arithmetic of *p*-functions.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, verw. Geb., 1968, Bd. 9, S. 163-195. 9. *Островский И. В.* Описание класса I_0 в одной специальной полугруппе вероятностных мер.— Тр. ФТИНТ АН УССР. Мат. физика и функциональный анализ, 1973, вып. 4, с. 3—12.

Поступила 19 июня 1978 г.