УДК 517.521.8

Д. И. СОКОЛЕНКО

K-МАТРИЦЫ, ОГРАНИЧЕННО РАВНОСИЛЬНЫЕ СХОДИМОСТИ, И K-МАТРИЦЫ, ОГРАНИЧЕННО РАВНОСИЛЬНЫЕ МАТРИЦАМ ЧЕЗАРО

1. Данная заметка является продолжением работы [1]. Н. А. Давыдову [2] принадлежит

Теорема А. *Если положительная T-матрица $A = \| a_{nk} \|$ удовлетворяет условию: для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо неравенство*

$$a^{\{p_i\}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} > \frac{1}{2},$$

где число $a^{\{p_i\}}$ зависит от выбранной последовательности $\{p_i\}$, то эта матрица ограниченно равносильна сходимости.

В данной работе доказывается утверждение, обобщающее теорему А на K-матрицы, не обязательно положительные, и с помощью этого утверждения получена одна теорема о K-матрицах, ограниченно равносильных матрицам Чезаро.

2. Справедливо следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — K-матрица, для которой*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | \equiv a \neq 0, \tag{1}$$

и $\{S_k\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность комплексных чисел, причем

$$\lim_{i \to \infty} S_{k'_i} = S^*; \quad \lim_{i \to \infty} S_{k''_i} = S^{**}, \tag{2}$$

где S^* и S^{**} — аффиксы концов диаметра множества всех частичных пределов последовательности $\{S_k\}$. Если

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{nk'_i} \right| + \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{nk''_i} \right| > a, \tag{3}$$

то матрица A не суммирует последовательность $\{S_k\}$. (Эта теорема для положительных T-матриц доказана Н. А. Давыдовым [3]).

Доказательство. 1. Случай положительной матрицы A рассмотрен нами в работе [1].

2. Случай действительной матрицы A. Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — действительная матрица и $\{S_k\}$ — последовательность, удовлетворяющие всем условиям теоремы 1. Обозначим через $B = \| b_{nk} \|$ матрицу, у которой $b_{nk} = | a_{nk} | - a_{nk}$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$. Из равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и неравенств

$$0 \leqslant b_{nk} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \quad (n, k = 1, 2, \ldots)$$

в силу условия (1) заключаем, что $B = \| b_{nk} \|$ — положительная K-матрица, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = 0.$$

Поэтому матрица B суммирует ограниченную последовательность $\{S_k\}$ к нулю.

Последовательность $\{S_k\}$ в силу случая 1 не суммируется матрицей $A' = \| a'_{nk} \|$, где $a'_{nk} = | a_{nk} |$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$. Справедливость утверждения теоремы 1 следует из последних двух предложений и равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| S_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3. Случай комплексной матрицы A. Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — комплексная матрица и $\{S_k\}$ — последовательность, удовлетворяющие всем условиям теоремы 1. Запишем $a_{nk} = b_{nk} + ic_{nk}$, где b_{nk} и c_{nk} $(n, k = 1, 2, \ldots)$ — действительные числа.

Матрица $B = \| b_{nk} \|$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а для матрицы $C = \| c_{nk} \|$ справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| = 0. \tag{4}$$

Действительно, имеем

$$\lim_{n \to \infty} b_{nk} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{Re} a_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

а в силу условия (1) заключаем

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = a, \tag{6}$$

поэтому из неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

используя то же условие (1), получаем

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| = a. \tag{7}$$

Равенства (5) — (7) и дают возможность утверждать, что $B = \| b_{nk} \|$ — K-матрица, удовлетворяющая условию типа (1).

Используя неравенство (в справедливости его нетрудно убедиться, например, по методу математической индукции)

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \right) \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{1/2} \right]^2,$$

где $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ — действительные последовательности, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{1/2} < \infty$, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \right)^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда в силу условий (1) и (7) следует справедливость равенства (4).

Утверждение будет полностью доказано, если покажем, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{np_i}| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |b_{np_i}|.$$

Последнее вытекает из очевидных неравенств $|a_{nk}| \geqslant |b_{nk}|$, $|a_{nk}| \leqslant$ $\leqslant |b_{nk}| + |c_{nk}|$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$ и равенств (4).

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1. Матрица $B = \| b_{nk} \|$ не суммирует последовательность $\{S_k\}$ по случаю 2. Матрица $C = \| c_{nk} \|$ в силу условия (4) суммирует последовательность $\{S_k\}$ к нулю. Справедливость утверждения теоремы 1 следует из последних двух предложений и равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} S_k + i \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} S_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Из теоремы 1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $A = \| a_{nk} \|$ — K-матрица, удовлетворяющая условию* (1). *Если для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо неравенство*

$$a^{\{p_i\}} \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{np_i}| > \frac{a}{2}, \tag{8}$$

где число $a^{\{p_i\}}$, вообще говоря, зависит от выбранной последовательности $\{p_i\}$, то матрица A ограниченно равносильна сходимости.

Следствие 1. Если K-матрица $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющая условию (1), удовлетворяет еше условию: для каждого k-го столбца $(k \geqslant k_0)$ существует строка n_k такая, что

$$|a_{n_k k}| \geqslant \theta > \frac{a}{2} \tag{9}$$

$\left(\text{в частности, если } |a_{kk}| \geqslant \theta > \frac{a}{2}\right)$, то она ограниченно равносильна сходимости.

Следствие 2 [4]. K-матрица $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющая условию (1), для которой

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left(|a_{nn}| - \sum_{k \neq n} |a_{nk}| \right) > 0, \tag{10}$$

ограниченно равносильна сходимости.

Доказательства следствий теоремы 2 аналогичны доказательствам следствий теоремы 2 работы [1].

Следует отметить, что класс K-матриц, ограниченно равносильных сходимости, определяемый условиями теоремы 2, шире аналогичного класса, определяемого условиями следствия 1 или 2 этой теоремы. Это вытекает из рассмотрения K-матрицы $A = \|a_{nk}\|$, у которой

$$a_{nk} = \begin{cases} 1+\varepsilon_k, \text{ если } n = k \\ \varepsilon_k, \text{ если } n \neq k \end{cases} \quad (n, k = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

где $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = 1$.

Теоремы 1 и 2 являются точными в том смысле, что условие (3) в теореме 1, как и условие (8) в теореме 2 ослабить нельзя. Действительно, преобразование $t_n = S_{n-1} + S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определяемое положительной K-матрицей $A = \|a_{nk}\|$, для которой $a \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 2$, суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $S_n = 1 + (-1)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Здесь вместо условий (3) и (8) выполнены соответственно условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk'_i} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk''_i} = 2 = a; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{np_i} \geqslant 1 = \frac{a}{2}.$$

Условие (1) в теоремах 1 и 2 является существенным. В самом деле, преобразование $t_n = (1-\theta) S_{n-3} + (1-\theta) S_{n-2} + \theta S_{n-1} + \theta S_n$ $(n = 4, 5, \ldots)$, где $\theta > 1$, определяемое K-матрицей $A = \|a_{nk}\|$, для которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 2$ и $|a_{nn}| = \theta > 1$ $(n = 4, 5, \ldots)$, суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $S_n = 1 + (-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Здесь вместо (1) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 2 < 4\theta - 2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|.$$

Теоремы 1 и 2 переносятся и на полунепрерывные K-матрицы.

3. Теорема 2 позволяет доказать следующее предложение.

Теорема 3. *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — K-матрица, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_{nk} - a_{n,\,k+1}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k\,(a_{nk} - a_{n,\,k+1}). \tag{12}$$

Если для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_i\}$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} p_i\,|a_{np_i} - a_{n,\,p_i+1}| > \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv \frac{a}{2} \neq 0, \tag{13}$$

то A ограниченно равносильна любой матрице Чезаро порядка $\alpha > 0$.

Следствие 1. Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — K-матрица, удовлетворяющая условию (12). Если для каждого k-го столбца $(k \geqslant k_0)$ существует строка n_k такая, что

$$k\,|a_{n_k k} - a_{n_k,\,k+1}| \geqslant \theta > \frac{a}{2} \tag{14}$$

$\left(в \text{ частности, если } k\,|a_{kk}-a_{k,\,k+1}| \geqslant \theta > \frac{a}{2}\right)$, где $a \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \times$ $\times\, a_{nk} \neq 0$, то A ограниченно равносильна любой матрице Чезаро порядка $\alpha > 0$.

Следствие 2. K-матрица $A = \|a_{nk}\|$, удовлетворяющая условию (12), для которой

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(n\,|a_{nn}-a_{n,\,n+1}| - \sum_{k\neq n}|a_{nk}-a_{n,\,k+1}|\right) > 0, \tag{15}$$

ограниченно равносильна любой матрице Чезаро порядка $\alpha > 0$.

Теорема 3 и ее следствия переносят на K-матрицы соответствующие теоремы Н. А. Давыдова, доказанные им для T-матриц [5]. Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам теорем Н. А. Давыдова, поэтому они не приводятся.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Н. А. Давыдову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Список литературы: 1. *Соколенко А. И.* О суммировании ограниченных последовательностей положительными K-матрицами.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1975, вып. 23, с. 119—124. 2. *Давыдов Н. А.* Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами.— Мат. заметки, 1973, т. 13, вып. 2, с. 179—188. 3. *Давыдов Н. А.* Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1975, вып. 23, с. 24—32. 4. *Михалин Г. А.* Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей.— Укр. мат. журн., 1974, т. 26, № 1, с. 95—98. 5. *Давыдов Н. А.* О включении и равносильности методов Теплица суммирования рядов.— Укр. мат. журн., 1968, т. 20 № 4, с. 460—471.

Поступила 1 октября 1975 г.