УДК 517.986.4

А. И. СКОРИК

ОБ ИЗОМЕТРИЯХ ОДНОГО КЛАССА ИДЕАЛЬНЫХ КООРДИНАТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Настоящая работа посвящена изучению структуры групп (обратимых) изометрий в некоторых классах идеальных координатных банаховых пространств. Полное описание группы изометрий в пространствах с базисом и симметричной нормой получено А. Пелчинским и С. Ролевичем [см. 1, теоремы IX.8.3, IX.8.5], а в произвольных симметричных координатных пространствах — М. Ш. Браверманом и Е. М. Семеновым [4; 5]). Мы используем технику, развитую в указанных работах, в применении к несимметричному случаю.

Один из центральных результатов (теорема 3) утверждает, что каждая изометрия координатного банахова пространства состоит в перестановке и перемене знаков координат, если аналогично устроены изометрии конечномерных координатных подпространств. В некоторых случаях удается получить полное описание группы изометрий.

Начиная с работы Орлича [2], изучались различные свойства пространств $l(\{p_k\})$ последовательностей, суммируемых с переменными показателями. Оказывается (теорема 2), что группа изометрий $G(l\{p_k\})$ состоит из перемен знаков и перестановок координат, соответствующих равным показателям в случае, когда в последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ не более одной двойки. В общем случае ортогональная группа координатного гильбертова подпространства добавляется как прямое слагаемое (замечание 3).

В работе рассматриваются пространства над полем вещественных чисел. В комплексном случае близкие результаты другими методами получены в статье [6].

Результаты настоящей работы анонсированы в статье [7]. Ниже используются следующие определения.

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ — последовательность вещественных чисел таких, что $p_k \geqslant 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Через $E(p) = l(\{p_k\})$ обозначается банахово пространство, элементами которого служат такие последовательности вещественных чисел $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\lambda}\right|^{p_k}$ сходится при некотором $\lambda > 0$, с нормой

$$\|x\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\lambda}\right|^{p_k} \leqslant 1\right\}. \qquad (1)$$

Через $E^n(p)$ обозначено подпространство $E(p)$, состоящее из векторов вида $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$. Через W^n будем обозначать подгруппу в $GL(n)$, состоящую из операторов вида

$$(g(x))_i = \pm \xi_{\sigma(i)}, \tag{2}$$

где $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, σ — перестановка множества $(1, \ldots, n \ldots)$. Если σ — перестан овка натурального ряда, а $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ — последовательность вещественных чисел, то операторы g, удовлетворяющие соотношениям (2), образуют группу W^∞. Через $W^\infty(p)$ $(W^n(p))$ обозначается подгруппа в W^∞ (W^n), состоящая из таких операторов g, для которых перестановка σ связана с последовательностью $\{p_i\}$ соотношениями

$$p_i = p_{\sigma(i)};\ i=1, 2, \ldots \tag{3}$$

Если E — некоторое банахово пространство последовательностей, то каждому подмножеству M натурального ряда сопоставляется подпространство

$$E_M = \{x \in E,\ x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \mid \xi_i = 0,\ i \overline{\in} M\}.$$

Кроме того, нам понадобятся следующие обозначения: Φ — линейная оболочка векторов $\{e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty\}_{i=1}^\infty$; t_j — оператор перемены знака j-й координаты:

$$t_j(e_j) = -e_j,\quad t_j(e_i) = e_i,\quad i \neq j, \tag{4}$$

$G(E)$ — группа изометрий пространства E.

§ 1. Предложение 1: *а) имеет место включение* $W^\infty(p) \subset G(E(p))$; *б) пусть* $g \in G(E(p))$. *Если* $g|_\Phi \in W^\infty$, *то* $g|_\Phi \in W^\infty(p)$.

Доказательство. Включение $W^\infty(p) \subset G(E(p))$ с очевидностью следует из выражения (1) для нормы в пространстве $E(p)$. Докажем п. «б». Пусть $g \in G(E(p))$, и $g|_\Phi \in W^\infty$. Существует (конечное или счетное) множество попарно различных чисел $\{q_i\}_{i \in I}$ и разбиение натурального ряда N в объединение непересекающихся подмножеств $\{N_i\}_{i \in I}$ таких, что $p_k = q_i$, $k \in N_i$. По предположению, $g|_\Phi \in W^\infty$. т. е. существует перестановка σ натурального ряда такая, что $g(e_i) = \pm e_{\sigma(i)}$. Требуется доказать, что $\sigma(N_i) = N_i$ для всех $i \in I$. Пусть это не так. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma(N_1) \neq N_1$, т. е. найдется номер $n_1 \in N_1$ такой, что $\sigma(n_1) = n_i \in N_i$, где $i > 1$. Пусть номер $m_1 \in M_j$, $j \geqslant 1$ такой, что $\sigma(m_1) \in N_1$. Рассмотрим вектор $x = ae_{n_1} + ae_{m_1}$, для которого $\|x\| = 1$, т. е.

$$|a|^{p_{n_1}} + |a|^{p_{m_1}} = 1, \text{ или } |a|^{q_1} + |a|^{q_j} = 1. \tag{5}$$

Тогда $g(x) = \pm ae_{n_i} \pm ae_{\sigma(m_1)}$. По предположению, $\|g(x)\| = \|x\| = 1$, т. е.

$$|a|^{p_{n_i}} + |a|^{p_{\sigma(m_1)}} = 1, \text{ или } |a|^{q_i} + |a|^{q_1} = 1. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), приходим к выводу, что $q_i = q_j$, откуда следует равенство $i = j$. Рассмотрим векторы $y = \xi_1 e_{n_1} + \xi_2 e_{m_1}$ такие, что $\| y \| = 1$, т. е.

$$|\xi_1|^{q_1} + |\xi_2|^{q_i} = 1. \tag{7}$$

Так как $g \in G(E(p))$, то $\| g(y) \| = \| y \| = 1$, или

$$|\xi_1|^{q_i} + |\xi_2|^{q_1} = 1. \tag{8}$$

После очевидных преобразований, из равенств (7)—(8) получаем

$$(1 - |\xi_1|^{q_1})^{q_1/q_i} + |\xi_1|^{q_i} = 1. \tag{9}$$

Положим $|\xi_1|^{q_i} = t$. Тогда для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо тождество

$$1 - t^{q_1/q_i} \equiv (1 - t)^{q_i/q_1}. \tag{10}$$

Продифференцировав его, получаем

$$-\frac{q_1}{q_i} t^{(q_1/q_i)-1} \equiv -\frac{q_i}{q_1}(1 - t)^{(q_i/q_1)-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{11}$$

Полагая t равным нулю, если $q_1 > q_i$, или единице, если $q_1 < q_i$, приходим к противоречию. Предложение доказано.

Замечание 1. Аналогично доказывается следующее равенство: $W^n \cap G(E^n(p)) = W^n(p)$.

Лемма 1. *Пусть набор $p = (p_1, \ldots, p_n)$ такой, что все числа p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — четные, и пусть $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — элемент из сопряженного пространства $(E^n(p))^*$. Тогда норма элемента y задается формулой*

$$\| y \|_{(E^n(p))^*} = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k \left| \frac{\eta_k}{\lambda p_k} \right|^{q_k}, \tag{12}$$

где $q_k = \frac{p_k}{p_k - 1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — сопряженные показатели, а число λ удовлетворяет равенству

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\eta_k}{p_k \lambda} \right|^{q_k} = 1. \tag{13}$$

Доказательство леммы состоит в очевидном применении метода неопределенных множителей Лагранжа для отыскания экстремума линейного функционала y на единичной сфере пространства $E^n(p)$.

Предложение 2. *Любая изометрия пространства $E^n(p)$ принадлежит W^n, если в наборе $p = (p_1, \ldots, p_n)$ не встречается двух двоек.*

Доказательство. Пусть $g \in G(E^n(p))$. Обозначим через M^1 множество тех индексов k, для которых число p_k нецелое или целое, но нечетное, через M_2 — множество таких k, для которых число p_k — четно. Пусть $k \in M_1$. Докажем, что существует индекс

$l \in M_1$ такой, что $g(e_k) = \pm e_l$. Для этого предварительно покажем, что $g(L_k) = L_l$, где через L_i обозначается гиперплоскость, состоящая из векторов вида $x = (\xi_1, \ldots, 0_i, \ldots, \xi_n)$. Действительно, пусть $x \in L_k$, $\|x\| = 1$. Предположим, от противного, что $y = g(x) \bar{\in} L_l$ ни при каком $l = 1, 2, \ldots, n$, т. е.

$$(g(x))_l \neq 0, \ l = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$\lambda(t) = \|g(x + te_k)\|. \tag{15}$$

Функция $\lambda(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{l=1}^{n} \left| \frac{(g(x + te_k))_l}{\lambda(t)} \right|^{p_l} \equiv 1. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, учитывая (14), что выполнены условия теоремы о неявной функции, т. е. функция $\lambda(t)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $t = 0$. Поскольку $g \in G(E^n(p))$, имеем

$$\lambda(t) = \|g(x + te_k)\| = \|x + te_k\|, \tag{17}$$

т. е.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{|\xi_i|}{\lambda(t)} \right)^{p_i} + \left(\frac{|t|}{\lambda(t)} \right)^{p_k} \equiv 1 \tag{18}$$

или

$$|t|^{p_k} = (\lambda(t))^{p_k} \left\{ 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{|\xi_i|}{\lambda(t)} \right)^{p_i} \right\}. \tag{19}$$

Так как число p_k нечетное, функция $|t|^{p_k}$ не является бесконечно дифференцируемой в точке $t = 0$, то в то время как правая часть тождества (19), в силу доказанного выше, бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $t = 0$, т. е. получено противоречие. Следовательно, $g(L_k) \subset \bigcup_{l=1}^{n} L_l$. Это означает, что существует индекс l, для которого $g(L_k) = L_l$. Поскольку группа $G(E^n(p))$ компактна, существует инвариантное относительно этой группы скалярное произведение. Имеет место включение $G(E^n(p)) \subset O(G)$, где $O(G)$ — группа всех ортогональных в этом скалярном произведении преобразований. Очевидно, преобразование t_j, определенное в (4), принадлежит группе $G(E^n(p))$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, собственные подпространства $\{\lambda e_j\}_{\lambda \in R_1}$ и L_j преобразования t_j взаимно ортогональны в этом скалярном произведении. Поскольку $g \in O(G)$, $g(e_k)$ ортогонально $g(L_k) = L_l$, т. е. $g(e_k) = \mu e_l$. Здесь $\mu = \pm 1$, так как $\|g(e_k)\| = \|e_k\| = 1$.

Покажем, что $l \in M_1$. Предположим, это не так, т. е. что число p_l четно. Пусть, как и выше, $x \in L_k$, $\| x \| = 1$, и

$$\lambda(t) = \| g(x + te_k) \| = \| g(x) \pm te_l \|. \tag{20}$$

Функция $\lambda(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} \left(\frac{|(g(x))_i|}{\lambda(t)} \right)^{p_i} + \left(\frac{t}{\lambda(t)} \right)^{p_l} \equiv 1. \tag{21}$$

Легко проверить, что неявная функция $\lambda(t)$, определяемая тождеством (21), бесконечно дифференцируема, что в силу тождества (19) приводит к противоречию. Таким образом, подпространство $L_{M_1} =$ л. об.$\{e_i,\ i \in M_1\} = \bigcap\limits_{i \in M_2} L_i$ инвариантно относительно оператора g. Поскольку g — ортогональное преобразование, подпространство $L_{M_2} =$ л. об.$\{e_i,\ i \in M_2\} = \bigcap\limits_{i \in M_1} L_i$, являющееся ортогональным дополнением к подпространству L_{M_1}, также инвариантно относительно оператора g. Таким образом, предложение будет полностью доказано, если оно будет доказано в случае, когда все числа p_k — четные, и среди них нет двух двоек. Очевидно, что $g \in W^n$ тогда и только тогда, когда $g^* \in W^n$. В предположении, что все числа p_k, $k = 1, \ldots, n$ четные и число 2 среди них встречается не более одного раза, покажем, что любая изометрия g^* пространства $(E^n(p))^*$ принадлежит группе W^n. Для этого достаточно, как и выше, показать, что для каждого номера k, $1 \leqslant k \leqslant n$, найдется номер l, $1 \leqslant l \leqslant n$, такой что $g^*(L_k) = L_l$. Пусть номер k такой, что $p_k \neq 2$. Пусть $x \in L_k$, $\| x \|_{\left(E^n_{(p)}\right)^1} = 1$.

Тогда в силу леммы 1

$$\| g^*(x + te_k) \|_{(E^n(p))^*} = \lambda(t) \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{|(g^*(x + te_k))_i|}{p_i \lambda(t)} \right]^{q_i}, \tag{22}$$

где функция $\lambda(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{|(g^*(x + te_k))_i|}{p_i \lambda(t)} \right]^{q_i} \equiv 1, \quad -\infty < t < \infty. \tag{23}$$

Пусть, от противного, $(g^*(x))_i \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Нетрудно проверить, что функция $\lambda(t)$, удовлетворяющая (23), является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $t = 0$. В силу (22) функция

$$f(t) = \| g^*(x + te_k) \|_{(E^n(p))^*} \tag{24}$$

также бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $t = 0$. Так как g — изометрия в $(E^n(p))^*$, имеет место равенство

$$f(t) = \| x + te_k \|_{(E^n(p))^*}. \tag{25}$$

Используя лемму 1, получаем тождество

$$f(t) \equiv \lambda(t)\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} p_i\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1(t)}\right)^{q_i} + p_k\left(\frac{|t|}{p_k\lambda_1(t)}\right)^{q_k}\right],\ -\infty < t < \infty, \tag{26}$$

где функция $\lambda_1(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1(t)}\right)^{q_i} + \left(\frac{|t|}{p_k\lambda_1(t)}\right)^{q_k} \equiv 1. \tag{27}$$

Умножая (27) на $p_k\lambda_1(t)$ и вычитая из (26), получаем

$$\lambda_1(t)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(p_i - p_k)\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1(t)}\right)^{q_i} \equiv f(t) - \lambda_1(t)\,p_k. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(t,\ \lambda_1) = \lambda_1\left\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(p_i - p_k)\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1}\right)^{q_i} + p_k\right\} - f(t). \tag{29}$$

Пусть число $\lambda_1^{(0)} > 0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1^{(0)}}\right)^{q_i} = 1. \tag{30}$$

Функция $\Phi(t,\ \lambda_1)$ бесконечно дифференцируема по совокупности переменных в окрестности точки $(0,\ \lambda_1^{(0)})$, и ее производная

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(p_i - p_k)\,(1 - q_i)\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1}\right)^{q_i} + p_k =$$

$$= (p_k - 1)\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{1}{p_i - 1}\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1}\right)^{q_i} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1}\right)^{q_i} + p_k \tag{31}$$

не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $(0,\ \lambda_1^{(0)})$. Действительно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}(0,\ \lambda_1^{(0)}) = (p_k - 1)\left\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\frac{1}{p_i - 1}\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1^{(0)}}\right)^{q_i} + 1\right\} \neq 0.$$

По теореме о неявной функции функция $\lambda_1(t)$, удовлетворяющая в силу (28) тождеству

$$\Phi(t,\ \lambda_1(t)) \equiv 0, \tag{32}$$

является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $t=0$. Из (27) получаем

$$|t|^{q_k} \equiv (p_k\lambda_1(t))^{q_k}\left[1-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{|\xi_i|}{p_i\lambda_1(t)}\right)^{q_i}\right].$$

Функция справа, в силу доказанного, бесконечно дифференцируема, в то время как функция $|t|^{q_k}$ не является бесконечно дифференцируемой, поскольку $p_k\neq 2$. Полученное противоречие позволяет сделать вывод, что $g^*(L_k)\subset\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ и, следовательно, $g^*(L_k)=L_l$ для некоторого индекса l, $1\leqslant l\leqslant n$. Таким образом, равенство $g^*(e_k)=\alpha e_l$, где $\alpha=\pm 1$, доказано для всех k, за исключением, быть может, одного значения k_0, для которого $p_{k_0}=2$. Применяя соображения ортогональности, получаем, что $g^*(e_{k_0})$ ортогонально $g^*(e_k)=\pm e_l$ для всех k, $k\neq k_0$. Значит, существует номер l_0 такой, что $g^*(e_{k_0})=\pm e_{l_0}$. Предложение доказано.

Теорема 1. *Группа изометрий пространства $E^n(p)$ совпадает с группой $W^n(p)$, если среди чисел $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ не более одной двойки.*

Утверждение теоремы следует из предложения 2 и замечания 1.

§ 2. Определение. Отражением в линейном пространстве E вдоль вектора $e\in E$ называется линейный оператор s_e, заданный равенством

$$s_e(x)=x-e^*(x)\cdot e, \tag{33}$$

где e^* — некоторый линейный функционал на E такой, что $e^*(e)=2$. Легко видеть, что операторы t_i в R^n, заданные равенствами (4), являются отражениями.

Лемма 2. *Пусть в R^n действует компактная группа G линейных преобразований, содержащая отражения t_j, $j=1,\ldots,n$, и отражение s_e вдоль вектора $e=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_i\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant n$. Тогда группа G неприводима.*

Доказательство. Обозначим через $<x, y>_G$ инвариантное относительно G скалярное произведение векторов x и y из R^n и через $O(G)$ — группу ортогональных в этом скалярном произведении преобразований. Поскольку $t_j\in G\subset O(G)$, собственный вектор e_j оператора t_j ортогонален собственному подпространству L_j этого оператора ($j=1,\ldots,n$) и, следовательно, $\{e_1,\ldots,e_n\}$ — ортогональный базис в R^n. Положим $c_j=<e_j, e_j>_G$, $j=1,\ldots,n$. Пусть E — инвариантное относительно группы G подпространство в R^n. Как следует из работы [3] (предложение 3, § 2, гл. 5), для каждого j либо $e_j\in E$, либо $e_j\perp E$. Пусть $E\neq\{0\}$, тогда существует номер k, $1\leqslant k\leqslant n$, такой что $e_k\in E$. Поскольку E инвариантно, $s_e(e_k)\in E$. Имеем

$$s_e(e_k)=e_k-2\frac{<e_k, e>_G}{<e, e>_G}e. \tag{34}$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (34), достаточно заметить, что так как $s_e \in G \subset O(G)$, то векторы $x \in R^n$, для которых $s_e(x) = x$, должны быть ортогональны вектору e. Но для таких векторов $e^*(x) = 0$ (см. (33)). Значит, функционал e^* должен иметь вид

$$e^*(x) = 2\frac{\langle x, e\rangle_G}{\langle e, e\rangle_G}. \tag{35}$$

Далее, $\langle e_k, e\rangle_G = \langle e_k, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\rangle_G = \alpha_k c_k \neq 0$. Подставляя полученное выражение в (34), находим

$$s_e(e_k) = -2\frac{\alpha_k c_k}{\langle e, e\rangle_G}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k - \frac{\langle e, e\rangle_G}{2\alpha_k c_k}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\right).$$

Таким образом, все координаты вектора $s_e(e_k)$, за исключением, быть может, k-й координаты, отличны от нуля и, следовательно, векторы e_i не ортогональны вектору $s_e(e_k)$ при $i = 1, \ldots, n$, $i \neq k$. Отсюда следует, что векторы e_i не ортогональны подпространству E ни для какого $i = 1, \ldots, n$, т. е. $e_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$. Значит, $E = R^n$, и группа G неприводима.

Лемма 3. *Пусть $\rho\colon W^n \to GL(n)$ — точное представление группы W^n в пространстве R^n такое, что $t_j \in \rho(W^n)$, $j=1, \ldots, n$, и $s_e \in \rho(W^n)$ для некоторого вектора $e = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, где $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $n \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть $\langle x, y\rangle$ — инвариантное относительно $\rho(W^n)$ скалярное произведение в R^n. Поскольку $t_j \in \rho(W^n)$, $j = 1, \ldots, n$, рассуждая, как и при доказательстве леммы 2, заключаем, что векторы e_i и e_j ортогональны $(i \neq j)$. Так как $e \overline{\in} L_i$, $i = 1, \ldots, n$, то отражения s_e и t_j не коммутируют ни для какого $j = 1, \ldots, n$ [см. 3, следствие предложения 3, § 2, гл. 5]. В силу точности представления ρ элементы $\tau_j = \rho^{-1}(t_j) \in W^n$, $j = 1, \ldots, n$, представляют собой n различных попарно коммутирующих отражений, а элемент $s = \rho^{-1}(s_e) \in W^n$ — отражение в R^n, не коммутирующее ни с одним из τ_j, $j = 1, \ldots, n$. По определению, группа W^n содержит отражения $s_{e_i} = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, $s_{e_i \pm e_j}$, $i \neq j$, и только эти отражения [см. 3, п. 5, § 4, гл. 6 и замечание 3, с. 179]. Следовательно, для каждого i существует либо номер $j(i)$ такой, что $\tau_i = s_{e_{j(i)}}$, либо номера $k(i)$ и $l(i)$, $k(i) \neq l(i)$, такие что $\tau_i = s_{e_{k(i)} \pm e_{l(i)}}$. Поскольку отражения τ_i попарно коммутируют, векторы $e_{j(i)}$ и $e_{k(i)} \pm e_{l(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, попарно ортогональны. Без ограничения общности можно считать, что

$$\tau_1 = s_{e_1+e_2},\ \tau_2 = s_{e_1-e_2},\ \ldots,\ \tau_{r-1} = s_{e_{r-1}+e_r},$$
$$\tau_r = s_{e_{r-1}-e_r};\quad \tau_{r+1} = s_{e_{r+1}},\ \ldots,\ \tau_n = s_{e_n}. \tag{36}$$

Легко видеть, что любой из векторов e_i, $e_i \pm e_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, в разложении по базису $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, \ldots, e_{r-1} + e_r, e_{r-1} - e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ имеет не более четырех ненулевых координат, т. е. каждое отражение s группы W^n коммутирует по крайней мере с одним из отражений τ_i, $i = 1, \ldots, n$, если $n \geqslant 5$. Таким образом, в условиях леммы $n \leqslant 4$.

Предложение 3. *Пусть E — банахово пространство последовательностей вещественных чисел такое, что: а) $e_i \in E$, t_i — изометрия в E для всех $i = 1, 2, \ldots$; б) для некоторого натурального числа $n \geqslant 2$ подпространства E_M при $|M| = n$ не являются евклидовыми.*

Если $g \in G(E)$, то для каждого $i = 1, 2, \ldots$ вектор $g(e_i)$ имеет не более k ненулевых координат, где k — наименьшее четное число, удовлетворяющее неравенству $k \geqslant \max\{8, n\}$.

Доказательство. Пусть, от противного, найдется вектор e_{i_0}, для которого $g(e_{i_0}) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in E_M$, где $\xi_i \neq 0$ при $i \in M$, и $|M| \geqslant k+1$. Пусть $M' \subset M$, $|M'| = k$. Рассмотрим подпространство $F \subset E$, порожденное векторами e_i, $i \in M'$ и вектором $g(e_{i_0})$. Очевидно, что $\dim F = k+1$ и $F \supset E_{M'}$. Векторы

$$e_i,\ i \in M', \text{ и } \omega = g(e_{i_0}) - \sum_{k \in M'} \xi_k e_k \tag{37}$$

образуют базис в пространстве F, и отражения t_i, $i \in M'$, и $s_\omega = -\prod_{i \in M'} t_i$ вдоль этих векторов изометрически действуют в F. Легко проверить, что в F изометрически действует отражение $s = g t_{e_{i_0}} g^{-1}$ вдоль вектора $g(e_{i_0})$ [см. 1, § 8, гл. 9]. Пусть G — замыкание в $GL(F)$ группы, порожденной отражениями t_i, $i \in M'$, s_ω и s. Поскольку все координаты вектора $g(e_{i_0})$ в разложении по базису (37) ненулевые, группа G удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, неприводима. Если группа G бесконечна, то можно показать, что пространство F — евклидово [см. 8, следствие]. Значит, евклидовым является и его подпространство $E_{M'}$, что противоречит условию, поскольку $|M'| = k \geqslant n$. Таким образом, группа G — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями. По условию, число $k+1$ нечетно. Заметим, что $-1_F \in G$. Как следует из классификации конечных неприводимых групп Коксетера [см. 3, теорема 1, п. 1, § 4, гл. 6], группа G имеет тип B_{k+1}, т. е. изоморфна группе W^{k+1}. Из леммы 3 вытекает неравенство $k+1 \leqslant 4$, что противоречит определению числа k $(k \geqslant 8)$. Предложение доказано.

Следствие 1. Если пространство E, удовлетворяющее условиям предложения 3, не содержит координатных евклидовых плоскостей, то для любой изометрии g пространства E вектор $g(e_i)$ имеет не более восьми отличных от нуля координат $(i = 1, 2, \ldots)$.

Замечание 2. Более детальный анализ групп Коксетера типа B_l D_l $(l \geqslant 5)$, E_7, E_8 позволяет заменить число 8 числом 4.

Следствие 2. Если $g \in G(E(p))$, где последовательность $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержит не более одной двойки, то вектор $g(e_i)$ имеет не более восьми ненулевых координат для всех $i = 1, 2, \ldots$

Действительно, в этом случае выполнены условия следствия 1.

Предложение 4. *Пусть E — банахово пространство последовательностей вещественных чисел, удовлетворяющее следующим условиям: а) $e_i \in E$, $t_i \in G(E)$, $i = 1, 2, \ldots$; б) для любого конечного подмножества M натурального ряда найдется подмножество $M' \supset M$ такое, что группа $G(E_{M'})$ является подгруппой группы W^k, где $k = |M'|$; в) если $|M'| = |M''| = 2$, то любая изометрия $g: E_{M'} \to E_{M''}$ задается соотношениями*

$$g(e_i) = \alpha_i e_{j(i)}, \tag{38}$$

где $i \in M'$, $j(i) \in M''$. Тогда любая изометрия пространства E задается соотношениями вида (38).

Доказательство. Из условия «в» вытекает, что пространство E удовлетворяет условиям предложения 3 с $n = 2$. Следовательно, для любой изометрии g пространства E и для любого $i = 1, 2, \ldots$ существует подмножество $M(i)$ натурального ряда такое, что $|M(i)| = 8$ и $g(e_i) \in E_{M(i)} \subset E_{M'(i)}$. Отражение $s = gt_i g^{-1}$ вдоль вектора $g(e_i)$ изометрически действует в $E_{M'(i)}$ [см. 1, § 8, гл. 9]. Ввиду условия «б» $s \in W^{k(i)}$ и, следовательно [см. 3, п. 5, § 4, гл. 6 и замечание 3, с. 179], либо

$$g(e_i) = \alpha_i e_{j(i)}, \quad j(i) \in M'(i), \tag{39}$$

либо

$$g(e_i) = \alpha_i (e_{j_1(i)} \pm e_{j_2(i)}), \tag{40}$$

где $j_1(i)$, $j_2(i) \in M'(i)$, $j_1(i) \neq j_2(i)$. Предположим, от противного, что для некоторого номера i имеет место равенство (40). Преобразуем его к виду

$$g^{-1}(e_{j_1(i)}) \pm g^{-1}(e_{j_2(i)}) = \frac{1}{\alpha_i} e_i. \tag{41}$$

Приведенные рассуждения применимы к любому элементу из группы $G(E)$, в том числе к элементу g^{-1}. Таким образом, каждый из векторов в левой части равенства (41) имеет по-прежнему не более двух ненулевых координат, причем одна из этих координат должна иметь номер i. Несложная проверка позволяет исключить все случаи, кроме двух:

$$g^{-1}(e_{j_1(i)}) = \beta(e_i \pm e_j), \quad g^{-1}(e_{j_2(i)}) = \mp \beta e_j; \tag{42}$$

$$g^{-1}(e_{j_1(i)}) = \beta(e_i \pm e_j), \quad g^{-1}(e_{j_2(i)}) = \beta(e_i \mp e_j). \tag{43}$$

Рассмотрим случай (42). Применяя оператор $g^{-1} t_{j_1(i)} g$ к вектору e_i, в силу (40) и (42) получаем

$$(g^{-1} t_{j_1(i)} g)(e_i) = -\alpha\beta(e_i \pm 2e_j), \tag{44}$$

что невозможно, поскольку, как и выше, выражение для вектора $(g^{-1} t_{j_1(i)} g)(e_i)$ должно определяться формулой, аналогичной (39) или (40). В случае (43) положим $M' = \{i\} \cup \{j\}$, $M'' = \{j_1(i)\} \cup \{j_2(i)\}$. Оператор g изометрически отображает $E_{M'}$ на $E_{M''}$, но условие «в» не выполняется. Таким образом, для любого $i=1, 2, \ldots$ имеет место равенство (39). Предложение доказано.

Лемма 4. *Любая изометрия g пространства $E(p)$ удовлетворяет условию $g|_\Phi \in W^\infty$, если среди чисел $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ не более одной двойки.*

Доказательство. Достаточно показать, что для пространства $E(p)$ выполнены условия предложения 4. Выполнение условия «а» очевидно, выполнение условия «б» следует из теоремы 1. Условие «в», как легко видеть, можно заменить:

в$'$) если плоскости $E_{M'}$ и $E_{M''}$ ($|M'|=|M''|=2$) симметричны (т. е. перестановка координат является изометрией), то любая изометрия $g: E_{M'} \to E_{M''}$ задается равенствами вида (38).

Для доказательства выполнения условия «в» в нашем случае заметим, что, как следует из предложения 1, симметричность плоскостей $E_{M'}$ и $E_{M''}$ влечет равенства $p_{i'} = p_{i'} \overset{\text{def}}{=} p'$, $p_{i''} = p_{i''} \overset{\text{def}}{=} p''$. Изометричность пространств $E_{M'} = l_{p'}^2$ и $E_{M''} = l_{p''}^2$ возможна, как хорошо известно, лишь при условии $p' = p''$. Отсюда в силу теоремы 1 следует выполнение требования «в».

Предложение 5. *Пусть E — банахово пространство последовательностей такое, что $t_i \in G(E)$, и $e_i \in E$, причем $\|e_i\| = 1$ ($i = 1, 2, \ldots$). Если $g \in G(E)$ удовлетворяет равенствам* (38), *то $g \in W^\infty$.*

Доказательство. Пусть $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in E$. Рассмотрим векторы

$$x' = x - \xi_i e_i \in L_i, \quad g(x') = y = (\eta_1, \eta_2, \ldots),$$
$$y' = y - \eta_{j(i)} e_{j(i)} \in L_{j(i)}. \tag{45}$$

Имеем

$$\|x' + \xi_i e_i\| = \|x - \xi_i e_i\| = \|g(x') \pm \alpha_i \xi_i e_{j(i)}\|, \tag{46}$$

т. е.

$$\|y' + \eta_{j(i)} e_{j(i)} + \xi_i \alpha_i e_{j(i)}\| = \|y' + \eta_{j(i)} e_{j(i)} - \xi_i \alpha_i e_{j(i)}\| =$$
$$= \|y' + \xi_i \alpha_i e_{j(i)} - \eta_{j(i)} e_{j(i)}\|. \tag{47}$$

Положим $f(\lambda) = \|y' + \lambda e_{j(i)}\|$. Функция $f(\lambda)$ — выпуклая и удовлетворяет, в силу (47), тождеству

$$f(\lambda + \eta_{j(i)}) = f(\lambda - \eta_{j(i)}) \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{48}$$

Предположим, что $\eta_{j(i)} \neq 0$. Тождество (48) возможно лишь в случае, когда $f(\lambda) = \text{const}$. Пусть $\lambda > 2\|y'\|$. Поскольку $f(0) = f(\lambda)$, имеем

$$\|y'\| = \|y' + \lambda e_{j(i)}\| > \lambda - \|y'\| > \|y'\|. \tag{49}$$

Полученное противоречие показывает, что $\eta_{j(i)} = 0$, т. е.

$$g(x') = y', \quad g(x) = y' + \xi_i \alpha_i e_{j(i)}, \tag{50}$$

а значит, $(g(x))_{j(i)} = \alpha_i \xi_i$. Здесь $\alpha_i = \pm 1$, поскольку $\|g(e_i)\| = \|e_i\| = 1$. Таким образом, $g \in W^\infty$.

Теорема 2. *Если в последовательности* $p=(p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ *не встречается двух двоек, то группа изометрий пространства* $E(p)$ *совпадает с группой* $W^\infty(p)$.

Доказательство. Пусть $g \in G(E(p))$. В силу леммы 4 $g|_\Phi \in W^\infty$. Как следует из предложения 1, $g|_\Phi \in W^\infty(p)$. Применяя предложение 5, заключаем, что $g \in W^\infty(p)$.

Аналогично доказывается

Теорема 3. *Если координатное банахово пространство удовлетворяет условиям предложения 4 и, кроме того,* $\|e_i\|=1$ *для всех* $i=1, 2, \ldots$, *то группа изометрий пространства* E *является подгруппой группы* W^∞.

Замечание 3. Пусть $p=(p_1, \ldots, p_n \ldots)$, $p_i \geqslant 1$,— произвольная последовательность и пусть $M_1=\{k \in N : p_k \neq 2\}$, $M_2=\{k \in N : p_k=2\}$. Тогда $E(p)_{M_2}=H$ — гильбертово подпространство в $E(p)$, и, как легко проверить, используя определение нормы (1), любой оператор $g \in O(H)+G(E(p)_{M_1})$ является изометрией в $E(p)$. Применяя теорему 3в [8], можно показать, что подпространства $E(p)_{M_2}$ и $E(p)_{M_1}$ инвариантны относительно изометрий из $G(E(p))$. Таким образом, $G(E(p))=O(H)+G(E(p)_{M_1})$ (группа $G(E(p)_{M_1})$ описана в теореме 2).

Список литературы: 1. *Rolewicz S.* Metric linear spaces. Warszawa, 1972. 353 s. 2. *Orlicz W.* Über konjugie Exponentenfolgen.— St. Math., 1931, Bd 3, S. 200-211. 3. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М., Мир, 1972. 334 с. 4. *Браверман М. Ш., Семенов Е. М.* Изометрии симметричных пространств.— Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 257—259. 5. *Браверман М. Ш., Семенов Е. М.* Изометрии симметричных пространств.— Тр. НИИМ ВГУ. Воронеж, 1975, вып. 17, с. 7—18. 6. *Fleming R. J., Jamison J. E.* Isometries on certain Banach spaces.— J. London Math. Soc., 1974, vol. 2, № 9, p. 121-127. 7. *Скорик А. И.* Об изометриях идеальных координатных пространств.— Усп. мат. наук, 1976, т. 31, № 2, с. 229—230. 8. *Зайденберг М. Г., Скорик А. И.* О группах изометрий, содержащих отражения.— Функциональный анализ и его приложения, 1976, т. 10, № 4, с. 87—88.

Поступила 17 мая 1975 г.