УДК 517.9

Л. И. САЗОНОВ

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ БИСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1°. Пусть Γ_i $(i = 1, 2)$ — простой замкнутый контур типа Ляпунова в плоскости комплексного переменного Z_i, обходящий точку $Z_i = 0$; $P_\pm^{(i)}$ — проекторы в пространстве $L_p(\Gamma_i)$ $(1 < p < \infty)$, связанные с оператором сингулярного интегрирования S_{Γ_i} формулами $P_\pm^{(i)} = \frac{1}{2}(I \pm S_{\Gamma_i})$; $A_p(\Gamma_i)$ — наименьшая замкнутая подалгебра алгебры ограниченных операторов в $L_p(\Gamma_i)$, содержащая все сингулярные операторы с непрерывными коэффициентами.

Алгеброй $A_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ бисингулярных операторов будем называть замыкание алгебраического тензорного произведения $A_p(\Gamma)\otimes\otimes A_p(\Gamma_2)$ по норме алгебры ограниченных операторов в $L_p(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)$. Бисингулярные операторы и близкие к ним операторы исследовались рядом авторов [1—5]. Эти исследования в основном были направлены на построение теории фредгольмовости для указанных операторов. В настоящей заметке рассматриваются вопросы нормальной разрешимости бисингулярных операторов.

Сформулируем в нужной для дальнейшего форме ряд известных результатов теории бисингулярных операторов.

Предложение 1. *Бисингулярный оператор* A $(\in A_p(\Gamma_1, \Gamma_2))$ *допускает следующее представление:*

$$A = \sum_{m,k=+,-} (a_{mk}(t_1, t_2) + T_{mk}) P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)} + K, \tag{1}$$

где K — *оператор из идеала* $K_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ *всех компактных операторов в* $L_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$; $a_{mk}(t_1, t_2)$ — *непрерывные на* $\Gamma_1\times\Gamma_2$ *функции;* T_{mk} — *операторы, определяемые формулами*

$$(T_{mk}f)(t_1, t_2) = \left[T_{mk}^1(t_1) f(t_1)\right](t_2) + \left[T_{mk}^2(t_2) f(\cdot, t_2)\right](t_1), .$$

в которых $T_{mk}^1(t_1)\, T_{mk}^2(t_2)$ — *непрерывные на* $\Gamma_1 (\Gamma_2)$ *оператор-функции со значениями в идеале* $K_p(\Gamma_2)$ $K_p(\Gamma_1))$ *всех компактных операторов в* $L_p(\Gamma_2)$, $(L_p(\Gamma_1))$. *Это представление единственно, если выполнены условия*

$$T_{mk}^1(t_1) = T_{m\bar{k}}^1(t_1),\ T_{mk}^2(t_2) = T_{\bar{m}k}^2(t_2), \tag{2}$$

где $m, k = +, -$, *а сопряжение означает замену индекса на противоположный.*

В дальнейшем, говоря о представлении (1), будем всегда считать, что условия (2) выполнены. Символом оператора A вида (1) будем называть набор оператор-функций

$$\sigma(A) = \left\{\sigma_{1,t_1}^{+}(A),\ \sigma_{1,t_1}^{-}(A),\ \sigma_{2,t_2}^{+}(A),\ \sigma_{2,t_2}^{-}(A)\right\},$$

которые определяются формулами

$$\sigma_{1,t_1}^{m}(A) = \sum_{k=+,-} a_{mk}(t_1, t_2) P_k^{(2)} + T_{m+}^1(t_1);$$

$$\sigma_{2,t_2}^{k}(A) = \sum_{m=+,-} a_{mk}(t_1, t_2) P_m^{(1)} + T_{+k}^2(t_2).$$

Предложение 2 [4]. *Отображение* $\sigma: A \to \sigma(A)$ *является непрерывным гомоморфизмом алгебры* $A_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$ *в алгебру*

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{2} C(\Gamma_1, A_p(\Gamma_2))\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{2} C(\Gamma_2, A_p(\Gamma_1))\right),$$

где $C(\Gamma_1, A_p(\Gamma_2))$ — *алгебра непрерывных на* Γ_1 *оператор-функций со значениями в* $A_p(\Gamma_2)$.

Ядро гомоморфизма σ совпадает с идеалом $K_p(\Gamma_1, \Gamma_2)$.

Характеристическим бисингулярным оператором в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ будем называть оператор следующего вида:

$$A = \sum_{m,k=+-} a_{mk}(t_1, t_2) P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)}. \tag{3}$$

Для операторов вида (3) имеет место следующий критерий фредгольмовости.

Предложение 3 [3; 4]. *Характеристический бисингулярный оператор A является Ф-оператором тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) $a_{mk}(t_1, t_2) = 0$ *на* $\Gamma_1 \times \Gamma_2$;

2) $\mathrm{ind}_{\Gamma_1} a_{mk}(t_1, t_2) = \mathrm{ind}_{\Gamma_1} a_{\overline{m}k}(t_1, t_2)$, $\mathrm{ind}_{\Gamma_2} a_{mk}(t_1, t_2) = \mathrm{ind}_{\Gamma_2} a_{m\bar{k}}(t_1, t_2)$ $(m, k = +, -)$.

Если оператор A фредгольмов, то его регуляризатор R принадлежит алгебре бисингулярных операторов и для его символа выполняются соотношения

$$\sigma_{1,t_1}^{\pm}(R) = \left[\sigma_{1,t_1}^{\pm}(A)\right]^{-1}; \quad \sigma_{2,t_2}^{\pm}(R) = \left[\sigma_{2,t_2}^{\pm}(A)\right]^{-1}.$$

2°. Исследование нормальной разрешимости операторов вида (3) начнем с формулировки необходимых условий. Естественно предположить, что условие 1 предложения 3 близко к необходимым условиям нормальной разрешимости. Следующая теорема до некоторой степени оправдывает это предположение.

Теорема 1. *Пусть оператор A вида 3 является нормально разрешимым оператором в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Тогда каждая из функций $a_{mk}(t_1, t_2)$ либо тождественно равна нулю, либо не обращается в нуль на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы о нормальной разрешимости одномерного сингулярного оператора [6].

В отличие от одномерных сингулярных операторов теорема 1 не допускает обращения. Достаточно рассмотреть, например, оператор

$$A = t_1^{-1}(1 - \alpha t_1/t_2)\, t_2 P_+ \otimes P_+ + P_+ \otimes P_- + P_- \otimes P_+ + P_- \otimes P_-$$
$$(0 < |\alpha| < 1)$$

в $L_p(\Gamma \times \Gamma)$, где Γ — единичная окружность.

Легко показать, что $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ и $\mathrm{Ker}\, A^* = \{0\}$. С другой стороны, из критерия фредгольмовости следует, что A не является Ф-оператором. Поэтому оператор A не является также и нормально разрешимым, однако его коэффициенты не обращаются в нуль на $\Gamma \times \Gamma$.

Установим простые, но важные для дальнейшего леммы.

Лемма 1. *Предположим, что оператор A представим в виде $A = BC$, где B и C — нормально разрешимые операторы такие, что $\mathrm{Ker}\, B$ и $\mathrm{Im}\, C$ имеют прямые дополнения в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Оператор A нормально разрешим тогда и только тогда, когда нор* *мально разрешим оператор* $(I - Q_C)P_B$, *где* Q_C *и* P_B — *произвольные проекторы на* $\operatorname{Im} C$ *и* $\operatorname{Ker} B$.

Доказательство. Оператор A нормально разрешим тогда и только тогда, когда сумма $\operatorname{Ker} B + \operatorname{Im} C$ замкнута в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ [7, с. 136]. Поэтому утверждение леммы следует из равенства $\operatorname{Ker} B + \operatorname{Im} C = \operatorname{Ker}(I - Q_C) + \operatorname{Im} P_B$.

Лемма 2. *Пусть* $\varkappa_{mk}$, μ_{mk} $(m, k = +, -)$ — *некоторый набор целых чисел. Тогда справедливы следующие представления:*

$$\varkappa_{mk} = r_{mk} + s_{mk} + \rho_{mk}; \quad \mu_{mk} = n_{mk} + \sigma_{mk} + \nu_{mk}, \tag{4}$$

причем входящие в формулы (4) целые числа удовлетворяют условиям:

α) $s_{mk} = s_{\overline{m}k}$, $\sigma_{mk} = \sigma_{m\bar{k}}$ $(m, k = +, -)$;

β) $r_{mk} = m|r_{mk}|$, $n_{mk} = k|n_{mk}|$, $-\rho_{mk} = m|\rho_{mk}|$, $-\nu_{mk} = k|\nu_{mk}|$;

γ) *пусть* m *и* k *фиксированы, тогда среди чисел* r_{mk}, ρ_{mk}, $r_{\overline{m}k}$, $\rho_{\overline{m}k}$ (n_{mk}, ν_{mk}, $n_{m\bar{k}}$, $\nu_{m\bar{k}}$) *лишь одно может быть отличным от нуля.*

Доказательство. Рассмотрим, например, числа $\varkappa_{++}$ и $\varkappa_{-+}$. Предположим, что $\varkappa_{++} \geqslant \varkappa_{-+}$. Тогда полагаем $s_{++} = s_{-+} = \max(\varkappa_{++}, \varkappa_{-+}) = \varkappa_{++}$; $r_{++} = \rho_{++} = \rho_{-+} = 0$, $r_{-+} = \varkappa_{-+} - \varkappa_{++}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Дальнейшие результаты справедливы для характеристических бисингулярных операторов, которые удовлетворяют следующему условию.

Условие H. Каждый из коэффициентов $a_{mk}(t_1, t_2)$ бисингулярного оператора A либо тождественно равен нулю на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, либо не обращается в нуль на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие H. Тогда оператор A можно представить в виде* $A = BC$, *где* B *и* C — *обобщенно обратимые операторы, т. е. существуют операторы* $B^{(-1)}$ *и* $C^{(-1)}$ *такие, что* $BB^{(-1)}B = B$, $CC^{(-1)}C = C$. (Используемые ниже свойства обобщенно обратимых операторов описаны в работе [7].)

Доказательство. Вместе с оператором A' рассмотрим оператор

$$A' = \sum_{m,k=+,-} a'_{mk}(t_1, t_2) P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)},$$

где $a'_{mk}(t_1, t_2) = a_{mk}(t_1, t_2)$, если $a_{mk}(t_1, t_2) \neq 0$ на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, если же $a_{mk}(t_1, t_2) \equiv 0$ на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, то $a'_{mk}(t_1, t_2)$ выбираем в виде $t_1^p t_2^q$, причем $p = \operatorname{ind}_{\Gamma_1} a_{\overline{m}\bar{k}}$; $q = \operatorname{ind}_{\Gamma_2} a_{m\bar{k}}$. Пусть $\varkappa_{mk} = \operatorname{ind}_{\Gamma_1} a'_{mk}$; $\mu_{mk} = \operatorname{ind}_{\Gamma_2} a'_{mk}$, тогда в силу леммы 2 оператор A' можно представить в виде $A' = BC'$, где

$$C' = \sum t_1^{r_{mk}} t_2^{n_{mk}} P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)};$$

$$B = \sum b_{mk} t_1^{\rho_{mk}} t_2^{\nu_{mk}} P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)};$$

$$b_{mk}(t_1, t_2) = a'_{mk}(t_1, t_2)\, t_1^{-r_{mk} - \rho_{mk}} t_2^{-n_{mk} - \nu_{mk}}.$$

Положим

$$C=\sum t_1^{r_{mk}} t_2^{n_{mk}} \varepsilon_{mk} P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)},$$

где

$$\varepsilon_{mk}=\begin{cases}1, \text{ если } a_{mk}\neq 0 \text{ на } \Gamma_1\times\Gamma_2;\\ 0, \text{ если } a_{mk}\equiv 0 \text{ на } \Gamma_1\times\Gamma_2.\end{cases}$$

Тогда оператор A, как нетрудно проверить, допускает представление $A=BC$. Из условий β леммы 2 следует, что оператор C обобщенно обратим и его обобщенный обратный можно выбрать в виде

$$C^{-1}=\sum t_1^{-r_{mk}} t_2^{-n_{mk}} \varepsilon_{mk} P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)}.$$

Обозначим через D оператор

$$D=\sum t_1^{-\rho_{mk}} t_2^{-\nu_{mk}} P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)}$$

и рассмотрим оператор $B_0=BD$, имеющий вид

$$B_0=BD=\sum b_{mk} P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)}.$$

Для частных индексов коэффициентов оператора B_0 выполняются соотношения $\operatorname{ind}_{\Gamma_1} b_{mk}=s_{mk}$, $\operatorname{ind}_{\Gamma_2} b_{mk}=\sigma_{mk}$. Поэтому в силу леммы 2 и предложения 3 оператор B_0 является Ф-оператором. Пусть $B_0^{(-1)}$ — его обобщенный обратный, тогда справедливо равенство $BDB_0^{(-1)}B=B_0B_0^{(-1)}B=B+(B_0B_0^{(-1)}-\mathrm{I})B$. В этом равенстве слагаемое $(B_0B_0^{(-1)}-\mathrm{I})B$ является конечномерным оператором. Но тогда вследствие леммы 5.2 [7, с. 141] оператор B обобщенно обратим и его обобщенно обратный $B^{(-1)}$ можно выбрать в виде $B^{(-1)}=DB_0^{(-1)}+K$, где K — конечномерный оператор.

Лемма 4. *Оператор* $\widetilde{A}=(\mathrm{I}-Q_C)P_B=(\mathrm{I}-CC^{(-1)})(\mathrm{I}-B^{(-1)}B)$ *является компактным оператором в* $L_p(\Gamma_1\times\Gamma_2)$.

Доказательство. Вследствие леммы 3 и предложения 2 достаточно установить, что $\sigma(\widetilde{A})=\sigma((\mathrm{I}-CC^{(-1)})(\mathrm{I}-B^{(-1)}B))\equiv 0$. Рассмотрим, например, оператор-функцию $\sigma_{1,t_1}^{+}(\widetilde{A})$. В силу предложения 2 справедливо равенство

$$\sigma_{1,t_1}^{+}(\widetilde{A})=\sigma_{1,t_1}^{+}(\mathrm{I}-CC^{(-1)})\,\sigma_{1,t_1}^{+}(\mathrm{I}-DB_0^{(-1)}B).$$

Из леммы 3 следует, что

$$\sigma_{1,t_1}^{+}(\mathrm{I}-CC^{(-1)})=\mathrm{I}-\big(t_1^{r_{++}}t_2^{n_{++}}\varepsilon_{++}P_{+}^{(2)}+$$

$$+t_1^{r_{+-}}t_2^{n_{+-}}\varepsilon_{+-}P_{-}^{(2)}\big)\big(t_1^{-r_{++}}t_2^{-n_{++}}\varepsilon_{++}P_{+}^{(2)}+t_1^{-r_{+-}}t_2^{-n_{+-}}\varepsilon_{+-}P_{-}^{(2)}\big).$$

Рассмотрим отдельно два случая:

1. Пусть $\varepsilon_{++}\neq 0$, $\varepsilon_{+-}\neq 0$, тогда вследствие леммы 2 либо $n_{++}=n_{+-}=0$, либо $\nu_{++}=\nu_{+-}=0$. Если $n_{++}=n_{+-}=0$, то

$$\sigma^{+}_{1,t_1}(\mathrm{I}-CC^{(-1)})=\mathrm{I}-\left(t_1^{r_{++}}P_+^{(2)}+t_1^{r_{+-}}P_-^{(2)}\right)\left(t_1^{-r_{++}}P_+^{(2)}+t_1^{-r_{+-}}P_-^{(2)}\right)\equiv 0;$$

если $\nu_{++}=\nu_{+-}=0$, то

$$\sigma^{+}_{1,t_1}(\mathrm{I}-DB_0^{(-1)}B)=\mathrm{I}-\left(t_1^{-\rho_{++}}P_+^{(2)}+\right.$$

$$\left.+\,t_1^{-\rho_{+-}}P_-^{(2)}\right)\left(b_{++}P_+^{(2)}+b_{+-}P_-^{(2)}\right)^{-1}\left(b_{++}t_1^{\rho_{++}}P_+^{(2)}+b_{+-}t_1^{\rho_{+-}}P_-^{(2)}\right)\equiv 0.$$

В последней цепочке равенств было использовано вытекающее из предложения 3 соотношение

$$\sigma^{+}_{1,t_1}(B_0^{-1})=\left[\sigma^{+}_{1,t_1}(B_0)\right]^{-1}=\left(b_{++}P_+^{(2)}+b_{+-}P_-^{(2)}\right)^{-1}.$$

2. Пусть хотя бы одно из чисел ε_{++} и ε_{+-} равно нулю. Тогда, как это следует из доказательства леммы 3, $\nu_{++}=\nu_{+-}=0$ и, следовательно, $\sigma^{+}_{1,t_1}(\mathrm{I}-DB_0^{-1}B)=0$. Аналогично устанавливаем, что $\sigma^{-}_{1,t_1}(\widetilde{A})\equiv 0$; $\sigma^{\pm}_{2,t_2}(\widetilde{A})\equiv 0$.

Из предыдущих результатов непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть выполнено условие H. Оператор A нормально разрешим тогда и только тогда, когда оператор* $\widetilde{A}=(\mathrm{I}-Q_C)P_B=(\mathrm{I}-CC^{(-1)})(\mathrm{I}-B^{(-1)}B)$ *конечномерен.*

Действительно, утверждение теоремы вытекает из лемм 1 и 4, а также из того факта, что нормальная разрешимость компактного оператора эквивалентна конечномерности его образа [7, с. 134].

Отметим два следствия из теоремы 2.

Следствие 1. Нормально разрешимый бисингулярный характеристический оператор A является обобщенно обратимым оператором, причем его обобщенный обратный $A^{(-1)}$ может быть выбран из алгебры бисингулярных операторов.

Действительно, для оператора A справедливо соотношение

$$AC^{(-1)}B^{(-1)}A=BCC^{(-1)}B^{(-1)}BC=B(CC^{(-1)}-\mathrm{I})B^{(-1)}BC+$$

$$+BB^{(-1)}BC=B\widetilde{A}C+BC,$$

в котором оператор $B\widetilde{A}C$ конечномерен.

Следствие 2. Пусть выполнено условие H. Тогда оператор A является компактным возмущением нормально разрешимого оператора, т. е. существует такой компактный оператор T, что оператор $A+T$ нормально разрешим.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathrm{I}-\widetilde{A}$. Можно считать, что оператор $\mathrm{I}-\widetilde{A}$ обратим, если это не так, то существует конечномерный оператор K такой, что $\mathrm{I}-\widetilde{A}+K$ — обратимый оператор. В качестве оператора T выберем оператор $T=B(\mathrm{I}-\widetilde{A})^{-1}C-BC$. Оператор $C_1=(\mathrm{I}-\widetilde{A})^{-1}C$ по-прежнему обобщенно обратим, и его обобщенный обратный можно выбрать в виде $C_1^{(-1)} = C^{(-1)}(\mathrm{I} - \widetilde{A})$. В силу лемм 1 и 4 достаточно установить конечномерность оператора $(\mathrm{I} - Q_{C_1}) P_B = (\mathrm{I} - C_1 C_1^{(-1)}) \times (\mathrm{I} - B^{(-1)} B)$. Но $(\mathrm{I} - Q_{C_1}) P_B = [\mathrm{I} - (\mathrm{I} - \widetilde{A})^{-1} C C^{(-1)} (\mathrm{I} - \widetilde{A})] P_B = (\mathrm{I} - \widetilde{A})^{-1} [(\mathrm{I} - Q_C)(\mathrm{I} - \widetilde{A}) P_B] = 0$, и следствие доказано.

3°. Исследуем нормальную разрешимость бисингулярных операторов следующего вида:

$$A = \sum_{m,k=+,-} c_{mk}(t_1)\, b_{mk}(t_2)\, P_m^{(1)} \otimes P_k^{(2)}, \tag{5}$$

где $c_{mk}(t_1)$ $(b_{mk}(t_2))$ непрерывные на Γ_1 (Γ_2) рациональные функции.

Пусть выполнено условие H. Тогда, следуя доказательству леммы 3, построим операторы B, C, D такие, что $A = BC$, а оператор $B_0 = BD$ является Φ-оператором.

Лемма 5. *Предположим, что все коэффициенты оператора A не обращаются в нуль на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Тогда оператор $\mathrm{I} - Q_C = \mathrm{I} - CC^{(-1)}$ имеет вид*

$$\mathrm{I} - Q_C = \sum_{m=+,-} K_m^1(t_1)\, P_m^{(1)} \otimes \mathrm{I} + \sum_{k=+,-} K_k^2(t_2)\, \mathrm{I} \otimes P_k^{(2)} + K, \tag{6}$$

где K — конечномерный оператор, $K_m^1(t_1)$, $(K_k^2(t_2))$ — оператор-функции, принадлежащие алгебраическому тензорному произведению $C(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2)$ $\left(K_p^0(\Gamma_2) \otimes C(\Gamma_2)\right)$, где $K_p^0(\Gamma_i)$ — идеал (незамкнутый) конечномерных операторов в $L_p(\Gamma_i)$, причем выполняются условия: если $K_m^1(t_1) \neq 0$ $\left(K_k^2(t_2) \neq 0\right)$, то $n_{m+} \neq 0$ или $n_{m-} \neq 0$, $(r_{+k} \neq 0$ или $r_{-k} \neq 0)$ $(m, k = +, -)$.

Доказательство. Первое утверждение доказывается непосредственным вычислением композиции CC^{-1}, при этом учитывается, что операторы вида $P_m^{(i)} t_i^s P_{\overline{m}}^{(i)}$ являются конечномерными операторами в $L_p(\Gamma_i)$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что символ оператора $\mathrm{I} - Q_C$ имеет вид

$$\sigma(\mathrm{I} - Q_C) = \left\{K_+^1(t_1),\ K_-^1(t_1),\ K_+^2(t_2),\ K_-^2(t_2)\right\}.$$

Предположим, что оба числа (n_{++} и n_{+-}) равны нулю. Тогда

$$K_+^1(t_1) = \sigma_{1,t_1}^{+}(\mathrm{I} - CC^{(-1)}) = \mathrm{I} - \left(t_1^{r_{++}} P_+^{(2)} + t_1^{r_{+-}} P_-^{(2)}\right) \times \left(t_1^{-r_{++}} P_+^{2} + t_1^{-r_{+-}} P_-^{(2)}\right) \equiv 0.$$

Аналогично доказывается справедливость остальных условий.

Рассмотрим оператор B_0. Его можно представить в виде

$$B_0 = \sum_{m,k=+,-} \sigma_{1,t_1}^{m}(B_0)\left(P_m^{(1)} \otimes \mathrm{I}\right) = \sum_{k=+,-} \sigma_{2,t_2}^{k}(B_0)\left(\mathrm{I} \otimes P_k^{(2)}\right).$$

Следующая лемма устанавливает вид обобщенного обратного оператора к оператору B_0.

Лемма 6. *Обобщенный обратный $B_0^{(-1)}$ к оператору B_0 с точностью до конечномерного оператора совпадает с каждым из операторов $R_1 + R_2 - R_1B_0R_2$ и $R_1 + R_2 - R_2B_0R_1$, где операторы R_1 и R_2 определяются формулами*

$$R_1 = \sum_{m=+,-} \left[\sigma_{1,t_1}^m (B_0)\right]^{-1} P_m^{(1)} \otimes \mathrm{I}; \quad R_2 = \sum_{k=+,-} \left[\sigma_{2,t_2}^k (B_0)\right]^{-1} \mathrm{I} \otimes P_k^{(2)}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно установить конечномерность операторов $(\mathrm{I} - R_1B_0)(\mathrm{I} - R_2B_0)$ и $(\mathrm{I} - B_0R_1)(\mathrm{I} - B_0R_2)$. Используя тот факт, что операторы вида $P_m^{(i)} a(t_i) P_{\overline{m}}^{(i)}$, где $a(t_i)$ — непрерывная на Γ_i рациональная функция, являются конечномерными операторами, легко установить, что операторы $\mathrm{I} - R_1B_0$ и $\mathrm{I} - B_0R_1$ принадлежат множеству $K_p^0(\Gamma_1) \otimes A_p(\Gamma_2)$, а операторы $\mathrm{I} - R_2B_0$ и $\mathrm{I} - B_0R_2$ — множеству $A_p(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2)$. Таким образом, операторы $(\mathrm{I} - B_0R_1)(\mathrm{I} - B_0R_2)$ и $(\mathrm{I} - R_1B_0)(\mathrm{I} - R_2B_0)$ принадлежат множеству $K_p^0(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2)$, и лемма доказана.

Теорема 3. *Оператор A вида* (5) *с рациональными распадающимися коэффициентами нормально разрешим тогда и только тогда, когда выполнено условие H.*

Доказательство. Предположим, что коэффициенты оператора A не обращаются в нуль на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Вследствие теоремы 2 для доказательства достаточно установить конечномерность оператора

$$\widetilde{A} = (\mathrm{I} - CC^{(-1)})(\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B).$$

Из леммы 5 следует, что оператор $\mathrm{I} - CC^{(-1)}$ имеет вид (6). Покажем, например, что оператор

$$K_+^1(t_1)(P_+^{(1)} \otimes \mathrm{I})(\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B)$$

является конечномерным. Вследствие леммы 6 оператор $\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B$ можно с точностью до конечномерного представить в виде

$$\mathrm{I} - D[R_1B + (\mathrm{I} - R_1B_0)R_2B],$$

причем оператор $D(\mathrm{I} - R_1B_0)R_2B$ принадлежит алгебраическому тензорному произведению $K_p^0(\Gamma_1) \otimes A_p(\Gamma_2)$. Поэтому остается рассмотреть оператор

$$K_+^1(t_1)(P_+^{(1)} \otimes \mathrm{I})DR_1B.$$

Пусть $K_+^1(t_1) \not\equiv 0$, тогда из леммы 5 и леммы 2 следует, что $\nu_{++} = \nu_{+-} = 0$. Но тогда справедливо равенство

$$\sigma_{1,t_1}^+(B) = \sigma_{1,t_1}^+(B_0)\left[\sigma_{1,t_1}^+(D)\right]^{-1}, \quad \sigma_{1,t_1}^+(D) = t_1^{-\rho_{++}} P_+^{(2)} + t_1^{-\rho_{+-}} P_-^{(2)}$$

и, следовательно,

$$(P_+^{(1)} \otimes \mathrm{I})DR_1B = (P_+^{(1)} \otimes \mathrm{I})\,\sigma_{1,t_1}^+(D)\,\sigma_{1,t_1}^+(R_1)\,\sigma_{1,t_1}^+(B) + K = P_+^{(1)} \otimes \mathrm{I} + K,$$

где K — оператор из множества $K_p^0(\Gamma_1) \otimes A_p(\Gamma_2)$. Таким образом, оператор $K_+^1(t_1)(P_+^{(1)} \otimes \mathrm{I})(\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B)$ действительно является конечномерным оператором. Доказательство конечномерности других слагаемых, входящих в оператор $(\mathrm{I} - CC^{(-1)})(\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B)$, может быть осуществлено аналогично рассмотренному случаю.

Предположим теперь, что для коэффициентов оператора выполнено условие H. Для определенности рассмотрим, например, случай, когда лишь $b_{++}(t_2)C_{++}(t_1) \equiv 0$. Тогда, следуя доказательству леммы 5, можно показать, что оператор $\mathrm{I} - CC^{-1} - P_+^{(1)} \otimes P_+^{(2)}$ имеет вид, определяемый леммой 5. Поэтому вследствие предыдущих рассуждений достаточно установить конечномерность оператора $(P_+^{(1)} \otimes P_+^{(2)})(\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B)$. Покажем, что этот оператор одновременно принадлежит множествам $K_p^0(\Gamma_1) \otimes A_p(\Gamma_2)$ и $A_p(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2)$. Действительно, с точностью до операторов из множества $K_p^0(\Gamma_1) \otimes A_p(\Gamma_2)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(P_+^{(1)} \otimes P_+^{(2)})(\mathrm{I} - DB_0^{(+1)}B) \cong (P_+^{(1)} \otimes P_+^{(2)})(\mathrm{I} - DR_1B) \cong$$
$$\cong (P_+^{(1)} \otimes P_+^{(2)})(\mathrm{I} - \sigma_{1,t_1}^{+}(D)\,\sigma_{1,t_1}^{+}(R_1)\,\sigma_{1,t_1}^{+}(B)) \cong 0.$$

В последнем из них использован тот факт, что в силу леммы 3 $\nu_{++} = \nu_{+-} = 0$ и, следовательно,

$$\sigma_{1,t_1}^{+}(B) = \sigma_{1,t_1}^{+}(B_0)\left[\sigma_{1,t_1}^{+}(D)\right]^{-1}, \quad \sigma_{1,t_1}^{+}(R_1) = \left[\sigma_{1,t_1}^{+}(B_0)\right]^{-1}.$$

Аналогично можно установить соотношение

$$(P_+^{(1)} \otimes P_+^{(2)})(\mathrm{I} - DB_0^{(-1)}B) \in A_p(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2).$$

Но пересечение множеств $K_p^0(\Gamma_1) \otimes A_p(\Gamma_2)$ и $A_p(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2)$ совпадает с алгебраическим тензорным произведением

$$K_p^0(\Gamma_1) \otimes K_p^0(\Gamma_2).$$

Таким образом, теорема доказана и в этом случае. Рассмотрение других случаев вырождения коэффициентов оператора A мало чем отличается от разобранного выше.

Автор признателен В. С. Пилиди за полезное обсуждение работы.

Список литературы: 1. *Симоненко И. Б.* О многомерных дискретных свертках.— Мат. исследования. Кишинев, 1968, т. 3, вып. 1, с. 108—122. 2. *Douglas R. G., Howe R.* On the C^*-algebra of Teoplitz operators on the quarter-plane.— Trans. Amer. Math. Soc., 1971, vol. 158, p. 203-218. 3. *Пилиди В. С.* О бисингулярном уравнении в пространстве.— Мат. исследования. Кишинев, 1972, т. 7, вып. 3, с. 167—175. 4. *Пилиди В. С.* Вычисление индекса бисингулярного оператора.— Функциональный анализ и его приложения, 1973, т. 7, вып. 4, с. 93—94. 5. *Пилиди В. С., Сазонов Л. И.* Априорные оценки для характеристических бисингулярных операторов.— Докл. АН СССР, 1974, т. 217, с. 285—287. 6. *Лайтерер Ю., Маркус А. С.* О нормальной разрешимости сингулярных интегральных операторов в симметричных пространствах.— Мат. исследования. Кишинев, 1972, т. 7, вып. 1, с. 72—82. 7. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев, Штиинца, 1973. 426 с.

Поступила 23 мая 1977 г.