УДК 517.55

А. Л. РОНКИН

ТЕОРЕМА О ДЕЛЕНИИ КВАЗИПОЛИНОМОВ

1. Квазиполиномом одной переменной z принято называть конечную сумму вида $P(z) = \sum a_k \exp \lambda_k z$, где a_k, λ_k — комплексные числа. Вообще линейная комбинация вида

$$P(z) = \sum_{1}^{m} f_k(z) \exp \lambda_k z \tag{1}$$

при комплексных λ_k называется [см. 1]: P-квазиполиномом, если $f_k(z)$ — полиномы: R-квазиполиномом, если $f_k(z)$ — рациональные функции; E-квазиполиномом, если $f_k(z)$ — целые функции нулевой степени (т. е. такие, что $\lim\limits_{|z| \to \infty} \ln |f(z)| |z|^{-1} = 0$); M-квазиполиномом, если $f_k(z)$ — мероморфные функции нулевой степени (т. е. отношение целых функций нулевой степени).

Числа λ_k в представлении (1) называются показателями соответствующего квазиполинома, а функции $f_k(x)$ — коэффициентами. Множество показателей λ_k (предполагается, что $\lambda_k \neq \lambda_j$ и $f_k(z) \not\equiv 0$) называют спектром квазиполинома.

Квазиполиномом нескольких переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ принято называть конечную сумму вида $P(z) = \sum a_k \exp \langle\lambda_k, z\rangle$, где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $a_k \in C$, $\lambda_k = (\lambda_k^1, \ldots, \lambda_k^n)$ и $\langle\lambda_k, z\rangle = \sum \lambda_k^j z_j$. Так же, как и в случае одной переменной, определяются P, R, E, M-квазиполиномы многих переменных. Целые функции нулевой степени в этом случае определяются так же как и для одной переменной.

Функции многих переменных, являющиеся квазиполиномом по каждой переменной, могут не быть квазиполиномами. Такие функции, как показано в [2], имеют вид

$$\sum_{1}^{m} a_k \exp \lambda_k(z), \tag{2}$$

где a_k — комплексные числа, $\lambda_k(z)$ — полиномы, линейные по каждой переменной. Функции вида (2) мы будем называть функциями класса S^n. Так же как и ранее, естественно определяются классы функций PS^n, RS^n, ES^n, MS^n. Так, классом MS^n называется множество функций n переменных, представимых в виде

$$\sum_{1}^{m} \varphi_k(z) [\psi_k(z)]^{-1} \exp \lambda_k(z),$$

где $\lambda_k(z)$ — полиномы, линейные по каждой переменной, а $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ — целые функции нулевой степени.

В настоящей работе будет исследована стабильность указанных классов функций относительно деления.

2. Первая теорема о делении квазиполиномов (одной переменной) принадлежит Дж. Ф. Ритту. В 1929 г. он доказал [3], что если частное двух квазиполиномов $\Phi(z) = P(z)/Q(z)$ есть целая функция, то $\Phi(z)$ — квазиполином.

В 1963 г. А. Шилдс [4] показал, что условия теоремы Ритта можно ослабить. А именно, достаточно потребовать, чтобы число полюсов функции $\Phi(z)$ в круге $|z| < r$ было бы $o(r)$ при $r \to \infty$. Кроме того, А. Шилдс доказал, что если $P(z)$ есть P-квазиполином, $Q(z)$ — квазиполином и их частное $\Phi(z) = P(z)/Q(z)$ — целая функция, то $\Phi(z)$ является P-квазиполиномом.

В 1971 г. А. Я. Гордон и Б. Я. Левин [1] существенно обобщили и усилили теоремы А. Шилдса. Они, в частности, получили, что если число полюсов частного двух M-квазиполиномов в круге $|z| < r$ есть величина $o(r)$ при $r \to \infty$, то это частное само является M-квазиполином.

Для случая многих переменных теоремы о делении квазиполиномов стали рассматриваться сравнительно недавно. В 1974 г. В. Аванесян и Р. Гию [5] доказали теорему Ритта для квазиполиномов многих переменных. Затем С. Беренштейн и М. Достал [6] доказали, что если отношение двух P-квазиполиномов есть целая функция, то это отношение является R-квазиполиномом. В 1978 г. автором [2] было получено обобщение теоремы А. Шилдса для функций класса PS^n.

Отметим, что результаты работ [2; 5; 6] получены разными путями. Используя метод, отличный от ранее примененных, в настоящей работе мы докажем теорему, усиливающую приведенные теоремы. Для ее формулировки потребуется ввести понятие характеристики числа полюсов мероморфной функции многих переменных. Пусть $\Phi(z)$ — мероморфная в C^n функция. Как известно [7], функцию $\Phi(z)$ можно представить единственным образом в виде $\Phi(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — целые локально несократимые функции. Назовем характеристикой числа полюсов мероморфной функции $\Phi(z)$ объем ($(2n-2)$-мерный) нулевого множества функции $\psi(z)$ в шаре $|z| < r$, вычисленный с учетом кратности* и обозначим через $n^-(r, \Phi)$.

Теорема А. *Пусть функции*

$$P(z) = \sum_1^m f_k(z) \exp \lambda_k(z); \quad Q(z) = \sum_1^q g_j(z) \exp \mu_j(z)$$

принадлежат классу MS^n. Пусть далее $\Phi(z) = P(z)/Q(z)$. Тогда если $n^-(t, \Phi) = o(t^{2n-1})$, то функция $\Phi(z) \in MS^n$ и имеет вид $\Phi(z) = \sum d_k(z) \exp \beta_k(z)$, где $d_k(z)$ представляют собой рациональные функции с целыми коэффициентами от функций $\{f_k(z)\}$ и $\{g_j(z)\}$.

3. Доказательство теоремы А опирается на некоторое уточнение теоремы А. Я. Гордона и Б. Я. Левина [1]. Для получения

* Определение кратности нулевого множества см. в работе [8].

этого уточнения повторим кратко доказательство теоремы 1 из статьи [1], производя некоторый дополнительный анализ. При этом мы будем рассматривать лишь тот случай, когда квазиполиномы заданы во всей плоскости*.

Сопряженной диаграммой M-квазиполинома $P(z)$,

$$P(z)=\sum_{1}^{m} f_k(z)\exp\lambda_k z,$$

называется наименьший выпуклый многоугольник $\overline{I(P)}$, содержащий весь спектр $P(z)$. Выпуклую область $I(P)$, получаемую зеркальным отражением сопряженной диаграммы относительно вещественной оси, будем называть просто индикаторной диаграммой M-квазиполинома $P(z)$. Заметим, что не меняя относительного расположения корней M-квазиполинома, можно сдвигать его индикаторную диаграмму (умножая на $\exp az$) и поворачивать вокруг точки нуль (заменой $z\to z\exp i\beta$).

Имеется [см. 1] тесная связь между распределением корней функции $P(z)$ и ее индикаторной диаграммой, а именно:

Все корни M-квазиполинома, за исключением, быть может, множества нулевой плотности, расположены внутри сколь угодно малых углов $|\arg z-\theta_j|<\varepsilon$ $(j=1, 2, \ldots, q)$, где θ_j — направление внешних нормалей к сторонам индикаторной диаграммы $I(P)$ и $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1}n(r, \theta_j, \varepsilon)=(2\pi)^{-1}l_j$. Здесь $n(r, \theta_j, \varepsilon)$ — количество корней $P(z)$ в секторе $|z|<r$, $|\arg z-\theta_j|<\varepsilon$, а l_j — длина соответствующей стороны индикаторной диаграммы. С помощью этого утверждения далее доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Если $P(z)$, $Q(z)$ — M-квазиполиномы и число полюсов функции $\Phi(z)=P(z)/Q(z)$ в круге $|z|<r$ есть $o(r)$ и каждая из «самых правых»**) точек $I(Q)$ совпадает с одной из точек соответствующей стороны на $\partial I(P)$, то $I(Q)\subseteq I(P)$.*

Теперь, опираясь на лемму 1, доказательство теоремы о делении квазиполиномов проводится следующим образом. Пусть функции

$$P(z)=\sum_{0}^{m-1} f_k(z)\exp\lambda_k z;\quad Q(z)=\sum_{0}^{q} g_j(z)\exp\mu_j z \tag{3}$$

являются M-квазиполиномами. Пусть далее $\Phi(z)=P(z)/Q(z)$, причем $n^{-}(r, \Phi)=o(r)$.

Поворотом плоскости можно добиться, чтобы «самая правая» точка $I(Q)$ была единственная. Перенумеруем показатели $\{\mu_j\}$ и $\{\lambda_k\}$ таким образом, чтобы $\operatorname{Re}\mu_0>\operatorname{Re}\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\operatorname{Re}\mu_q$, $\operatorname{Re}\lambda_0\geqslant\operatorname{Re}\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\operatorname{Re}\lambda_{m-1}$. Введем следующие обозначения: $Q_1(z)=[g_0(z)]^{-1}Q(z)$; $\overset{*}{g_j}(z)=[g_0(z)]^{-1}g_j(z)$; $d=\operatorname{Re}\mu_0-\operatorname{Re}\mu_1$. Очевидно, что $d>0$ и $\overset{*}{g_0}(z)=1$.

---

* А. Я. Гордон и Б. Я. Левин рассматривали квазиполиномы внутри углов $|\arg z|>\pi/2$.

** Самая правая точка — точка с максимальной действительной частью.

Пусть правее прямой $l_d = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\lambda_0 - d\}$ лежат точки $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_l$ спектра $P(z)$. Спектр M-квазиполинома $P^{(1)}(z) = P(z) - f_0(z) Q_1(z) \exp(\lambda_0 - \mu_0) z$ не содержит точки λ_0 и правее прямой l_d состоит из точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$. Очевидно, что $n^-(r, P^{(1)}/Q_1) = o(r)$. По лемме 1 после подходящего сдвига будет выполняться $I(Q_1) \subseteq I(P^{(1)})$. Проделав эту операцию $l+1$ раз, получая последовательно $P^{(j)}(z) = P^{(j-1)}(z) - f_{j-1}(z) Q_1(z) \exp(\lambda_j - \mu_0) z$, мы приходим к M-квазиполиному

$$P_1(z) = P(z) - T_1(z) Q_1(z), \tag{4}$$

где $T_1(z)$ также M-квазиполином. Спектр $P_1(z)$ находится в сопряженной диаграмме $I(P)$ и не содержит точек, лежащих правее прямой l_d. Кроме того, $n^-(r, P_1/Q_1) = o(r)$ и, следовательно, при подходящем сдвиге $I(Q_1) \subseteq I(P_1)$. Переход от $P(z)$ к $P_1(z)$ называют [см. 1] d-операцией. Повторим ее и придем к M-квазиполиному $P_2(z)$:

$$P_2(z) = P_1(z) - T_2(z) Q_1(z), \tag{5}$$

где $T_2(z)$ — также M-квазиполином. При этом спектр $P_2(z)$ принадлежит $I(P)$ и лежит весь правее прямой $l_{2d} = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\lambda_0 - 2d\}$. Повторив d-операцию s раз так, чтобы $sd > \max \operatorname{Re}\lambda_k - \min \operatorname{Re}\lambda_j$, мы получим M-квазиполином $P_s(z)$,

$$P_s(z) = P_{s-1}(z) - T_s(z) Q_1(z), \tag{6}$$

не имеющий спектра, т. е. $P_s(z) \equiv 0$. Объединяя (4), (5), все промежуточные равенства и равенство (6), получим $P(z) = Q_1(z) \Phi_1(z)$, где $\Phi_1(z) = \sum_1^s T_j(z)$. Следовательно, $\Phi(z) = \Phi_1(z) [g_0(z)]^{-1}$, и, значит, функция $\Phi(z)$ является M-квазиполиномом.

Установим характер зависимости коэффициентов и показателей M-квазиполиномов $P_j(z)$ и $T_j(z)$ от $f_k(z)$, $g_k(z)$, μ_k, λ_k. В этом как раз и будет заключаться упомянутое уточнение теоремы из работы [1]. Число слагаемых в M-квазиполиноме $P^{(1)}(z)$ не больше, чем $m+q$, и при каждом переходе от $P^{(j)}$ к $P^{(j+1)}$ увеличивается не более чем на q. Значит, число n_1 различных показателей у квазиполинома $P_1(z)$ таково, что $n_1 \leqslant m + q(l+1) \leqslant m + qm \leqslant m(q+1)$. Коэффициенты M-квазиполинома $P_1(z)$ имеют вид

$$\sum_j r_j f_j(z) + \sum_{j,\,k} c_{j,\,k} f_j(z) g_k^*(z),$$

где $r_j \in \{0, 1\}$; $c_{j,\,k} \in \{0, -1\}$. Коэффициентами квазиполинома $T_1(z)$ являются функции $f_k(z)$. Таким образом, коэффициенты M-квазиполиномов $T_1(z)$ и $P_1(z)$ являются полиномами от f_j, g_k с коэффициентами из множества Z, целых чисел. Степени этих полиномов r_1 и максимум модуля коэффициентов d_1 таковы, что $d_1 \leqslant m(q+1)$, $r_1 \leqslant 2$.

Показатели M-квазиполинома $P_1(z)$ равны либо λ_j либо $\lambda_k - \mu_0 + \lambda_j$, а показатели $T_1(z)$ равны $\lambda_j - \mu_0$. Таким образом, показатели M-квазиполиномов $P_1(z)$, $T_1(z)$ имеют вид $\sum l_i\lambda_i + \sum \overset{*}{l}_k\mu_k$, где l_i, $\overset{*}{l}_k$ — целые числа, причем максимум модулей l_i, $\overset{*}{l}_k$, равный b_1, таков, что $b_1 \leqslant 3$.

Введем следующие обозначения: n_j — число различных показателей $P_j(z)$; r_j — максимальная степень полиномов от $\{f_k\}$, $\{\overset{*}{g}_k\}$, являющихся коэффициентами M-квазиполиномов $T_j(z)$, $P_j(z)$; d_j — максимум модулей коэффициентов полиномов от $\{f_k\}$, $\{\overset{*}{g}_k\}$, являющихся коэффициентами M-квазиполиномов $T_j(z)$, $P_j(z)$; b_j — максимум модулей коэффициентов в линейных комбинациях чисел $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_k\}$, представляющих показатели M-квазиполиномов $P_j(z)$ и $T_j(z)$.

Поскольку переход при помощи d-операции от P_j к P_{j+1} аналогичен переходу от P к P_1, то мы можем выписать систему рекуррентных соотношений: $n_1 \leqslant m(q+1)$; $r_1 \leqslant 2$; $d_1 \leqslant m(q+1)$; $b_1 \leqslant 3$; $n_{j+1} \leqslant n_j(q+1)$; $r_{j+1} \leqslant r_j + 1$; $d_{j+1} \leqslant n_j d_j$; $b_j \leqslant b_j + 2$. Теперь нетрудно получить, что $n_s \leqslant (q+1)^s m$; $r_s \leqslant s+2$; $b_s \leqslant 2s+1$; $d_s \leqslant m^{s+2}(q+1)^{(s+1)(s+2)/2}$. Таким образом, нами доказано следующее уточнение теоремы 1 из работы [1].

(X). Существует такая константа $c = c(s, m, q)$, зависящая только от числа различных показателей (m, q) M-квазиполиномов $P(z)$ и $Q(z)$* и числа s, характеризующего расположение показателей M-квазиполинома $Q(z)$, что если число полюсов функции $F(z) = P(z)/Q(z)$ в круге $|z| < r$ есть величина $o(r)$, то функция $F(z)$ имеет вид $F(z) = \sum \psi_k(z) \exp \beta_k z$, где $\psi_k(z)$ — полиномы от $\{g_j[g_0]^{-1}\}$, $\{f_k\}$ с коэффициентами — целыми числами. При этом степени этих полиномов и коэффициенты ограничены константой $c(s, m, q)$. Показатели β_k имеют вид $\beta_k = \sum p_j^k \mu_j + \sum \tilde{p}_j^k \lambda_j$, где p_j^k, $\tilde{p}_j^k \in Z$ и $\max\limits_{k,\,j} \{|\tilde{p}_j^k|, |p_j^k|\} \leqslant c(s, m, q)$.

4. Доказательство теоремы А. Пусть

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_1^m f_k(z_1, \ldots, z_n) \exp \lambda_k(z_1, \ldots, z_n);$$

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = \sum_1^q g_j(z_1, \ldots, z_n) \exp \mu_j(z_1, \ldots, z_n)$$

— функции класса MS^n. Функцию $F(z) = P(z)/Q(z)$ запишем в виде**

$$F(z) = \frac{\sum\limits_1^m f_k(z) \left(\exp \lambda_k'(z^*)\, z_n\right) \exp \lambda_k''(z^*)}{\sum\limits_1^q g_j(z) \left(\exp \mu_j'(z^*)\, z_n\right) \exp \mu_j''(z^*)}, \tag{7}$$

* $P(z)$ и $Q(z)$ имеют вид 3.

** Везде далее $z = (z_1, \ldots, z_n)$, а $z^* = (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

где λ_k', λ_k'', μ_k', μ_k'' — полиномы линейные по каждой переменной $z_1, \ldots, z_n$. Здесь $\lambda_k(z) = \lambda_k'(z^*) z_n + \lambda_k''(z^*)$ и $\mu_j(z) = \mu_j'(z^*) z_n + \mu_j''(z^*)$. Если все функции $\mu_k'(z^*)$ равны при всех $k = 1, 2, \ldots, q$, то функция $F(z)$ представима в виде отношения двух функций класса MS^n, таких что показатели знаменателя не зависят от z_n. Предположим, что не все функции $\mu_k'(z^*)$ равны. Сгруппируем в числителе и знаменателе выражения (7), слагаемые с равными $\lambda_i'(z^*)$ и $\mu_k'(z^*)$. Сделав соответствующую перенумерацию, можем записать

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} f_k(z^*, z_n) \exp \lambda_k''(z^*) \right) \exp \lambda_{m_j}'(z^*) z_n}{\sum_{j=1}^{\tilde{l}} \left(\sum_{k=\tilde{m}_j}^{\tilde{m}_{j+1}-1} g_k(z^*, z_n) \exp \mu_k''(z^*) \right) \exp \mu_{\tilde{m}_j}(z^*) z_n}.$$

Поскольку теперь функции $\mu_{\tilde{m}_j}'(z^*)$ $(j = 1, \ldots, \tilde{l})$ все различны, а также ввиду непрерывности этих функций, найдется такой номер $\tilde{m}_j$ (пусть для определенности он равен 1), такой поликруг E в C_{n-1} и такое целое число s, что

$$\operatorname{Re} \mu_1'(z^*) - \sup_{j>1} \operatorname{Re} \mu_{\tilde{m}_j}'(z^*) = B(z^*) > 0, \ \forall z^* \in E;$$

$$sB(z^*) > \max_{k,\, l} \left| \operatorname{Re}\left(\lambda_j'(z^*) - \lambda_k'(z^*) \right) \right|, \ \forall z^* \in E.$$

Согласно условию теоремы А $n^-(t, F)$ есть $o(t^{2n-1})$. Отсюда, используя теоремы 4.2.8 и 4.3.7 [8], заключаем, что при фиксированном z^*, принадлежащем некоторому поликругу $E_1 \subset E$, число полюсов функции $F(z^*, z_n)$ в круге $|z_n| < r$ есть величина $o(r)$. Значит, применяя при каждом фиксированном $z^* \in E_1$ теорему А. Я. Гордона и Б. Я. Левина, заключаем, что $F(z^*, z_n)$ — M-квазиполином от z_n. Более того, согласно сделанному в этой работе уточнению (x) функция $F(z^*, z_n)$ при каждом фиксированном $z^* \in E_1$ имеет вид

$$F(z^*, z_n) = \sum \theta_k(z^*, z_n) \exp \beta_k(z^*) z_n, \tag{8}$$

где функции $\theta_k(z^*, z_n)$ являются полиномами от функций

$$\left\{ \frac{\sum_{k=\tilde{m}_j}^{\tilde{m}_{j+1}-1} g_k(z) \exp \mu_k''(z^*)}{\sum_{1}^{\tilde{m}_2 -} g_k(z) \exp \mu_k''(z^*)} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} f_k(z) \exp \lambda_k''(z^*) \right\}$$

степени не выше чем $c = c(s, m, q)$ с целыми коэффициентами, модули которых не превосходят c. Ясно, что таких полиномов конечное число. Перенумеруем их, обозначив через $\gamma_i(z)$.

Показатели $\beta_k(z^*)$ имеют вид $\sum p_k \lambda_k'(z^*) + \sum \tilde{p}_k \mu_k'(z^*)$, где p_k, $\tilde{p}_k$ — целые числа, модули которых не превосходят c. Таких линейных комбинаций конечное число. Перенумеруем их, обозначив через $\varphi_k(z)$.

Образуем теперь всевозможные M-квазиполиномы от z_n с коэффициентами из множества $\{\gamma_i(z)\}$ и показателями из множества $\{\varphi_k(z^*)\}$. Таких квазиполиномов конечное число. Перенумеруем их, обозначив через $\psi_k(z^*, z_n)$.

Заметим, что при каждом фиксированном $z^* \in E_1$ найдется такой номер p, что

$$F(z^*, z_n) = \psi_p(z^*, z_n), \ \forall z_n. \tag{9}$$

Но так как функций $\psi_p(z^*, z_n)$ конечное число, то найдется такой номер p, что равенство (9) выполняется на плотном (в E_1) множестве значений z^*. Поскольку функции $F(z)$ и $\psi(z)$ — мероморфны, то $\psi_p(z) \equiv F(z)$, и значит функция $F(z)$ имеет вид (8) при всех z^*. Таким образом доказано, что функцию F можно представить в виде

$$F(z) = \tilde{P}(z)/\tilde{Q}(z), \tag{10}$$

где $\tilde{P}(z)$, $\tilde{Q}(z)$ — функции класса MS^n, коэффициенты $\tilde{P}(z)$ и $\tilde{Q}(z)$ — полиномы от функций $\{f_k(z)\}$, $\{g_j(z)\}$ с целыми коэффициентами, причем показатели функции $\tilde{Q}(z)$ не зависят от z_n. Учитывая представление (10), аналогично переходим к представлению $F(z) = \hat{P}(z)/\hat{Q}(z)$, где $\hat{P}(z)$, $\hat{Q}(z) \in MS^n$, коэффициенты $\hat{P}(z)$ и $\hat{Q}(z)$ получены так же, как и прежде, а показатели функции $\hat{Q}(z)$ не зависят от z_{n-1}, z_n. Повторив эти рассуждения еще $n-2$ раза, прийдем к представлению $F(z) = \hat{F}(z)/G(z)$, где $G(z)$ — функция класса MS^n, показатели которой не зависят от $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n$, т. е. $G(z)$ — мероморфная функция нулевой степени. Функция $\hat{F}(z)$ принадлежит классу MS^n, а ее коэффициенты, так же как и коэффициенты функции $G(z)$, являются полиномами от $\{f_k\}$, $\{g_j\}$. Тем самым теорема А доказана.

5. Сформулируем несколько следствий из теоремы А.

Следствие 1. Если фигурирующие в условии теоремы А функции $P(z)$ и $Q(z)$ принадлежат классу S^n, то функция $F(z) = P(z)/Q(z)$ принадлежит классу S^n.

Следствие 2. Если фигурирующие в условии теоремы А функции $P(z)$ и $Q(z)$ принадлежат классу PS^n, то функция $F(z) = P(z)/Q(z)$ принадлежит классу RS^n. Если кроме того, полиномы $g_j(z)$ попарно взаимно просты, то функция $F(z)$ принадлежит классу PS^n.

Следствие 3. Если фигурирующие в условии теоремы А функции $P(z)$ и $Q(z)$ принадлежат классу RS^n, то функция $F(z)=P(z)/Q(z)$ принадлежит классу RS^n.

Аналогично теореме А доказывается

Теорема В. *Пусть функции* $P(z)=\sum f_k(z)\exp\lambda_k(z^*)z_n$; $Q(z)=\sum g_j(z)\exp\mu_j(z^*)z_n$, *определенные на множестве* $G\times C$ (G — *область в* C^{n-1}), *таковы, что: 1) функции* $\lambda_k(z^*)z_n$, $\mu_j(z^*)z_n$, $f_k(z)$, $g_j(z)$ *голоморфны в* $G\times C$; *2) функции* $f_k(z^*, z_n)$, $g_j(z^*, z_n)$ *при каждом фиксированном* z^* *являются целыми функциями нулевой степени; 3) функция* $F(z^*, z_n)=P(z)/Q(z)$ *при каждом фиксированном* z^* *имеет* $o(r)$ *полюсов в круге* $|z_n|<r$. *Тогда* $F(z)$ *имеет вид* $F(z)=\sum\psi_k(z)\exp\beta(z^*)z_n$, *где* $\psi_k(z)$ — *отношение двух голоморфных функций, являющихся полиномами от* $\{g_k\}$, $\{f_j\}$, *а* $\beta_k(z^*)$ — *линейные комбинации функций* $\lambda_k(z^*)$, $\mu_j(z^*)$.

Автор благодарит Б. Я. Левина за полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

Список литературы: **1.** *Гордон А. Я., Левин Б. Я.* О делении квазиполиномов. — Функциональный анализ, 1971, т. 5, вып. 1, с. 22—29. **2.** *Ронкин А. Л.* О квазиполиномах. — Функциональный анализ, 1978, т. 12, вып. 4, с. 93—94. **3.** *Ritt G. F.* On the zeroes of exponential polynomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1929, vol. 31, p. 680-681. **4.** *Shields A.* On quotients of exponential polynomials. — Comm. Pure Appl. Math., 1963, vol. 36, p. 27-31. **5.** *Avanissian V., Gay R.* Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entieres de plusieurs variables. — Bull. Soc. math France, 1975, vol. 103, p. 341-348. **6.** *Berenstein G. A., Dostal M. A.* The Ritt theorem in several variables. — Ark. för mat., 1974, vol. 12, № 2, p. 267-280. **7.** *Ронкин Л. И.* Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев, Наукова думка, 1977. 163. с. **8.** *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 430 с.

Поступила 13 января 1979 г.