УДК 513.88

В. С. ПИЛИДИ

ОБ УНИТАРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПЕРАТОРОВ КРАТНОГО ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА

Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Через $l^2_+(H)$ обозначим гильбертово пространство всех последовательностей $f=\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ элемементов пространства H, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|^2<\infty.$$

Обозначим через $l^2(H)$ вводимое аналогичным образом пространство двусторонних последовательностей $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ элементов пространства H. Алгебру всех линейных непрерывных операторов в H будем обозначать через $B(H)$. Через Z будем обозначать множество всех целых чисел.

Пусть $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($\subset B(H)$) — последовательность обратимых операторов, удовлетворяющая условию $\sup\limits_n\|V_n\|<\infty$. С этой последовательностью свяжем оператор T одностороннего взвешенного сдвига (о. в. с.), действующий в пространстве $l^2_+(H)$ следующим образом: $Tf=g$; $f,\ g\in l^2_+(H)$; $g_n=V_{n-1}f_{n-1}$, $n\in Z$, $n\geqslant 1$; $g_0=0$. Последовательность $\{V_n\}$ будем называть весовой последовательностью оператора T, а число $\dim H$ — его кратностью.

Аналогично по удовлетворяющей тем же условиям последовательности $\{W_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ построим оператор двустороннего взвешенного сдвига (д. в. с.) в пространстве $l^2(H)$: $T_1f=g$; $f,\ g\in l^2(H)$; $g_n=W_{n-1}f_{n-1}$, $n\in Z$.

Операторам взвешенного сдвига кратности 1 посвящены многочисленные работы (см., например, работу [1] и цитированную в ней литературу). В статье [2] получен критерий унитарной эквивалентности* операторов о. в. с. произвольной кратности. В настоящей работе мы исследуем вопрос об унитарной эквивалентности операторов о. в. с. и д. в. с. Кроме общих признаков, относящихся к сдвигам произвольной кратности, мы более подробно рассматриваем случай сдвигов кратности 2. В предположении, что все операторы весовой последовательности представляются в некотором базисе жордановой клеткой порядка 2, установлены весьма простые критерии унитарной эквивалентности.

1°. Пусть T — оператор о. в. с. в пространстве $l_+^2(H)$ с весовой последовательностью $\{V_n\}$. Следуя работе [2], этому оператору поставим в соответствие последовательность $\{T^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} (\subset B(H))$, определяемую следующим образом:

$$T^{(0)} = 1,\ T^{(n)} = |V_{n-1}V_{n-2}\ \ldots\ V_0|,\ n = 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

где $|C| = (C^*C)^{1/2}$, $C \in B(H)$. Будем называть $\{T^{(n)}\}$ характеристической последовательностью оператора T.

Определение 1. *Пусть $\{B_n\}$ и $\{C_n\}$ — односторонние или двусторонние последовательности операторов из $B(H)$. Будем говорить, что эти последовательности унитарно эквивалентны, если существует унитарный оператор $U\ (\in B(H))$ такой, что для всех n $B_n = U^*A_nU$.*

Сформулируем теперь следующий результат, полученный в [2].

Теорема 1. *Операторы о. в. с. в пространстве $l_+^2(H)$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда унитарно эквивалентны их характеристические последовательности.*

Рассмотрим теперь операторы д. в. с. Пусть T — оператор д. в. с. в $l^2(H)$ с весовой последовательностью $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$; $l \in Z$. Введем последовательность $\{T^{(n,l)}\}_{n=-\infty}^{\infty} (\subset B(H))$ следующим образом: $T^{(0,l)} = 1$; при $n \geqslant 1$

$$T^{(n,l)} = |V_{n+l-1}V_{n+l-2}\ldots\ V_l|,$$

$$T^{(-n,l)} = |V_{-n+l}^{-1}V_{-n+l+1}^{-1}\ \ldots\ V_{l-1}^{-1}|.$$

Назовем ее l-й характеристической последовательностью оператора T. W^*-алгебру** $A_T^{(l)} (\subset B(H))$, порожденную всеми операторами l-й характеристической последовательности будем называть l-й характеристической алгеброй оператора T.

---

* Операторы T_1, $T_2 (\subset B(H))$ называются унитарно эквивалентными, если существует такой унитарный оператор $U\ (\in B(H))$, что $T_2 = U^*T_1U$.

** W^*-алгеброй, или алгеброй фон Неймана, называется симметричная подалгебра $B(H)$, замкнутая в слабой операторной топологии.

Теорема 2. *Характеристические алгебры $A_T^{(l)}$ ($l \in Z$) оператора T двустороннего взвешенного сдвига попарно пространственно изоморфны*.*

Доказательство теоремы сводится к следующим трем простым вспомогательным утверждениям.

Лемма 1. *Если все операторы весовой последовательности $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ неотрицательны, то все характеристические алгебры совпадают с W^*-алгеброй A ($\subset B(H)$), порожденной операторами системы $\{1\} \cup \{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.*

Доказательство. Покажем, например, что $A_T^{(0)} = A$. Хорошо известно, что W^*-алгебра, содержащая единичный оператор, вместе с обратимым оператором B содержит B^{-1} и вместе с оператором B ($\geqslant 0$) оператор $B^{1/2}$. Поэтому алгебра $A_T^{(0)}$ порождается последовательностью операторов

$$\ldots, V_{-1}V_{-2}^2V_{-1}, V_{-1}, 1, V_0, V_0V_1^2V_0, \ldots$$

Отсюда следует, что $A_T^{(0)} \subset A$.

Обратно, в силу сказанного выше, последовательно получаем, что операторы V_0^{-1}, V_1^2, V_1 $(=(V_1^2)^{1/2})$ принадлежат алгебре $A_T^{(0)}$. Аналогичным образом получаем, что алгебре $A_T^{(0)}$ принадлежат и остальные операторы весовой последовательности $\{V_n\}$, т. е. $A \subset A_T^{(0)}$, и окончательно $A = A_T^{(0)}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{U_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($\subset B(H)$)—последовательность унитарных операторов, T_1 и T_2 — операторы д. в. с. с весовыми последовательностями $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{U_{n+1}^*V_nU_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ соответственно. Тогда операторы T_1 и T_2 унитарно эквивалентны; для каждого l ($\in Z$) l-е характеристические последовательности этих операторов унитарно эквивалентны, а алгебры $A_{T_1}^{(l)}$ и $A_{T_2}^{(l)}$ пространственно изоморфны.*

Доказательство леммы сводится к установлению соотношения:

$$T_2^{(n, k)} = U_k^* T_1^{(n, k)} U_k, \; k, \; n \in Z.$$

Лемма 3. *Пусть $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($\subset B(H)$) —последовательность обратимых операторов. Существует такая последовательность $\{U_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ($\subset B(H)$) унитарных операторов, что для каждого n ($\in Z$) $U_{n+1}^*V_nU_n \geqslant 0$.*

Доказательство. Определим последовательность $\{U_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ с помощью следующих рекуррентных соотношений: $U_0 = 1$; $U_{n+1} = V_n|V_n|^{-1}U_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $U_n = V_n^{-1}|V_n^*|U_{n+1}$, $n = -1, -2, \ldots$. Все операторы этой последовательности уни-

---

* Напомним, что алгебры A_1, A_2 ($\subset B(H)$) называются пространственно изоморфными [3, с. 553], если существует такой унитарный оператор U ($\subset (B(H)$), что отображение $B \to U^*BU$ является изоморфизмом между A_1 и A_2.

тарны (для любого обратимого $C (\in B(H))$ операторы $C|C|^{-1}$ и $C^{-1}|C^*|$ унитарны). Остается показать, что при всех n $U_{n+1}^* \times \times V_n U_n \geqslant 0$. Пусть $n \geqslant 1$. Тогда

$$U_{n+1}^* V_n U_n = U_n^* |V_n|^{-1} V_n^* V_n U_n = U_n^* |V_n| |U_n| \geqslant 0;$$

аналогично при $n \leqslant -1$. Лемма доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что если одна из характеристических алгебр совпадает с $B(H)$, то и все эти алгебры совпадают с $B(H)$. В этом случае мы будем называть оператор д. в. с. регулярным.

2°. Каждому оператору $C (\in B(l^2(H)))$ естественным образом сопоставляется матрица $||C_{jk}||_{j,k=-\infty}^{\infty}$, элементами которой являются операторы из $B(H)$. Пусть T_1 и T_2 — операторы д. в. с. в пространстве $l^2(H)$, имеющие весовые последовательности $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{W_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ соответственно. Переходя к матрицам операторов, легко установить следующий факт.

Лемма 4. *Пусть $C \in B(l^2(H))$, $||C_{jk}||_{j,k=-\infty}^{\infty}$ — матрица этого оператора. Равенство $T_1 C = C T_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любых $j, k \in Z$ $V_j C_{jk} = C_{j+1,k+1} W_k$.*

Лемма 5. *Пусть T_1, $T_2 (\in B(l^2(H)))$ — операторы д. в. с. с весовыми последовательностями $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{W_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, состоящими из неотрицательных операторов. Предположим, что эти операторы унитарно эквивалентны, т. е. $T_2 = U^* T_1 U$ для некоторого унитарного оператора $U (\in B(l^2(H)))$; $||U_{jk}||_{j,k=-\infty}^{\infty}$ — матрица этого оператора. Тогда для любых $j, k (\in Z)$ $U_{j+1,k+1} = U_{jk}$.*

Доказательство. Учитывая унитарность оператора U, имеем: $UT_2 = T_1 U$, $U^* T_1 = T_2 U^*$.

Из леммы 4 тогда получаем, что для $j, k \in Z$

$$V_j U_{jk} = U_{j+1,k+1} W_k, \tag{1}$$

$$W_j U_{kj}^* = U_{k+1,j+1}^* V_k. \tag{2}$$

Перейдем в (2) к сопряженным операторам и поменяем местами j и k: $U_{jk} W_k = V_j U_{j+1,k+1}$. Тогда $U_{j+1,k+1} = V_j^{-1} U_{jk} W_k$. Из (1) $U_{j+1,k+1} = V_j U_{jk} W_k^{-1}$. Тогда $U_{jk} W_k^2 = V_j^2 U_{jk}$. Учитывая неотрицательность операторов весовых последовательностей, получаем, что $U_{jk} W_k = V_j U_{jk}$. Тогда

$$U_{j+1,k+1} = V_j U_{jk} W_k^{-1} = U_{jk} W_k W_k^{-1} = U_{jk}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $C_1, C_2 (\in B(H))$ — самосопряженные операторы, $P (\in B(H))$ — оператор, удовлетворяющий условиям: $\ker P = \{0\}$, $\ker P^* = \{0\}$, $PC_1 = C_2 P$; U — унитарная компонента полярного разложения оператора P (т. е. $P = U|P|$). Тогда $UC_1 = C_2 U$, т. е. операторы C_1 и C_2 унитарно эквивалентны.*

Доказательство этого утверждения (в предположении, что P обратим) содержится в [4, с. 294). Общий случай рассматривается совершенно аналогично.

Теорема 3. *Пусть T_1 и T_2 — регулярные операторы д. в. с. в $l^2(H)$. Если операторы T_1 и T_2 унитарно эквивалентны, то существует такое целое p, что для любого $k\ (\in Z)$ последовательности $\{T_1^{(n,k)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{T_2^{(n,k+p)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Используя леммы 2 и 3, легко показать, что достаточно ограничиться случаем весовых последовательностей, состоящих из неотрицательных операторов. Обозначим весовые последовательности операторов T_1 и T_2 соответственно через $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{W_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Пусть $U\ (\in B(l^2(H)))$ — такой унитарный оператор, что $T_1U = UT_2$. В силу леммы 5, $U_{j+1,\,k+1}$ для любых $j,\ k \in Z$. Положим $U_{jk} = U_{k-j}$. Из леммы 4 имеем тогда:

$$V_jU_k = U_kW_{j+k}. \tag{3}$$

Существует такой индекс p, что $U_p \neq 0$. Докажем, что $\ker U_p = \{0\}$, $\ker U_p^* = \{0\}$. Обозначим: $M = \overline{\operatorname{im} U_p}$. Из (3) при $k = p$ вытекает, что M является общим инвариантным подпространством всех операторов V_j, а тогда, в силу леммы 1, и всех операторов из алгебры $A_{T_1}^{(0)}\ (= B(H))$. Поэтому $M = H$, $\ker U_p^* = \{0\}$. Аналогично показываем, что $\ker U_p = \{0\}$. В силу леммы 6, существует такой унитарный оператор $\tilde{U}\ (\in B(H))$, что для всех j $V_j\tilde{U} = \tilde{U}W_{j+p}$. Отсюда следует, что для каждого $k\ (\in Z)$ последовательности $\{T_1^{(n,k)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{T_2^{(n,k+p)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ унитарно эквивалентны. Теорема доказана.

Отметим еще два следующих простых результата.

Теорема 4. *Пусть T_1 и T_2 — операторы д. в. с. в $l^2(H)$. Если существует такое целое число p, что последовательности*

$$\{T_1^{(n,0)}\}_{n=-\infty}^{\infty} \text{ и } \{T_2^{(n,p)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

унитарно эквивалентны, то унитарно эквивалентны операторы T_1 и T_2.

Теорема 5. *Пусть T_1 и T_2 — операторы д. в. с. в $l^2(H)$ с весовыми последовательностями $\{V_n\}$ и $\{W_n\}$, состоящими из неотрицательных операторов. Предположим, что существует набор операторов $\{U_\omega\}_{\omega\in\Omega}\ (\subset B(H))$ и набор целых чисел $\{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ такие, что выполняются следующие условия: 1) для каждого $\omega\ (\in \Omega)$ U_ω — частично изометрический оператор; 2) начальные (финальные) подпространства операторов U_ω образуют разложенные пространства H в ортогональную прямую сумму; 3) для всех $n\ (\in Z)$ и $\omega\ (\in \Omega)$ $U_\omega V_n = W_{n+p_\omega}U_\omega$. Тогда операторы T_1 и T_2 унитарно эквивалентны. Если $\dim H = 2$, то справедливо и обратное утверждение (в этом случае параметризующее множество Ω содержит не более двух элементов).*

3°. Рассмотрим теперь один частный случай. Предположим, что $\dim H_0 = 2$; в H_0 выберем и зафиксируем некоторый ортонормированный базис. Операторы из $B(H_0)$ будем задавать их матрицами в этом базисе. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям: $\alpha_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$; $\sup\limits_n |\alpha_n| < \infty$. В пространстве $l_+^2(H_0)$ рассмотрим оператор о. в. с. T_α с весовой последовательностью $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$V_n = \begin{Vmatrix} \alpha_n & 1 \\ 0 & \alpha_n \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{a}_n\}_{n=0}^{\infty}$: $a_0 = 0$, $\tilde{a} = 1$; $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha_k}$, $\tilde{a}_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k$, $n \geqslant 1$.

Тогда характеристическая последовательность оператора T_α состоит из таких операторов:

$$T_\alpha^{(n)} = \frac{|\tilde{a}_n|}{(4 + |a_n|^2)^{1/2}} \begin{Vmatrix} 2 & a_n \\ \bar{a}_n & 2 + |a_n|^2 \end{Vmatrix}.$$

Предположим, что последовательность $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\{\alpha_n\}$. По этой последовательности аналогичным образом построим оператор T_β и последовательности $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{b}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Рассмотрим вопрос об унитарной эквивалентности операторов T_α и T_β. Допустим, что операторы T_α и T_β унитарно эквивалентны. Тогда, в силу теоремы 1, унитарно эквивалентны операторы $T_\alpha^{(n)}$ и $T_\beta^{(n)}$. Приравнивая их определители и следы, получаем, что для $n = 0, 1, \ldots$ $|a_n| = |b_n|$. Нетрудно показать, что наряду с операторами T_α и T_β унитарно эквивалентными будут операторы, которые строятся аналогичным образом по последовательностям $\{\alpha_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$ Получаем тогда, что имеют место равенства

$$\left|\sum_{k=l}^{m} \frac{1}{\alpha_k}\right| = \left|\sum_{k=l}^{m} \frac{1}{\beta_k}\right|, \quad 0 \leqslant l \leqslant m < \infty.$$

Отсюда следует, что для некоторого вещественного θ выполняется одно из соотношений:

$$\alpha_n = e^{i\theta}\beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$\alpha_n = e^{i\theta}\bar{\beta}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Легко видеть, что соотношения (4) являются и достаточными условиями унитарной эквивалентности этих операторов. Если выполняется условие (5), то последовательность $\{\alpha_n\}$ должна удовлетворять некоторому дополнительному условию. Для нахождения этого условия нам потребуется следующая

Лемма 7. *Пусть* $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *произвольная последовательность комплексных чисел. Последовательности*

$$\left\{\left\|\begin{matrix} 0 & \gamma_n \\ \bar{\gamma}_n & |\gamma_n|^2 \end{matrix}\right\|\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \left\{\left\|\begin{matrix} 0 & \bar{\gamma}_n \\ \gamma_n & |\gamma_n|^2 \end{matrix}\right\|\right\}_{n=0}^{\infty}$$

унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда все точки γ_n *лежат на некоторой прямой или на окружности, проходящих через начало координат.*

Мы не будем приводить доказательство этого утверждения. Отметим только, что если все точки γ_n лежат на окружности $|z-a| = |a|$ или на прямой $z = e^{i\psi}\bar{z}$, то унитарная эквивалентность осуществляется соответственно операторами

$$\frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}\left\|\begin{matrix} -a & 1 \\ 1 & \bar{a} \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} e^{2i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Если выполняется условие (5), то после несложных преобразований получаем, что унитарно эквивалентны последовательности

$$\left\{\left\|\begin{matrix} 0 & a_n \\ \bar{a}_n & |a_n|^2 \end{matrix}\right\|\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \left\{\left\|\begin{matrix} 0 & \bar{a}_n \\ a_n & |a_n|^2 \end{matrix}\right\|\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Применим теперь лемму 7. Легко убедиться в том, что если все точки a_n лежат на некоторой прямой, проходящей через точку 0, то выполняется и условие (4).

Обратно, если выполнено условие (5) и все точки a_n лежат на окружности, проходящей через начало координат, то из леммы 7 выводим, что выполняется условие теоремы 1, т. е. операторы T_α и T_β унитарно эквивалентны. Сформулируем теперь окончательный результат.

Теорема 6. *Операторы о. в. с. кратности 2 с весовыми последовательностями соответственно*

$$\left\{\left\|\begin{matrix} \alpha_n & 1 \\ 0 & \alpha_n \end{matrix}\right\|\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \left\{\left\|\begin{matrix} \beta_n & 1 \\ 0 & \beta_n \end{matrix}\right\|\right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$(\alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0,\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ \sup_n |\alpha_n| < \infty,\ \sup_n |\beta_n| < \infty),$$

унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторого вещественного θ *выполняется одно из следующих условий:* 1) $\alpha_n = e^{i\theta}\beta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; 2) $\alpha_n = e^{i\theta}\bar{\beta}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *и все точки последовательности*

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\alpha_k}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

лежат на некоторой окружности в комплексной плоскости, проходящей через начало координат.

Рассмотрим теперь двусторонний случай. Пусть последовательности комплексных чисел $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условию: $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$, $n \in Z$, $\sup |\alpha_n| < \infty$, $\sup |\beta_n| < \infty$. Рассмотрим операторы д. в. с. T_α и T_β в пространстве $l^2(H_0)$, имеющие следующие весовые последовательности:

$$\left\{\begin{Vmatrix} \alpha_n & 1 \\ 0 & \alpha_n \end{Vmatrix}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \text{ и } \left\{\begin{Vmatrix} \beta_n & 1 \\ 0 & \beta_n \end{Vmatrix}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Введем последовательности $\{a_{n,k}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\tilde{a}_{n,k}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(k \in Z)$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$a_{0,k} = 0,\ a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{\alpha_{n+k}},\quad \tilde{a}_{0,k} = 1,\ \tilde{a}_{n+1,k} = \tilde{a}_{n,k}\alpha_{n+k}.$$

Тогда

$$T_\alpha^{(n,k)} = \frac{|\tilde{a}_{n,k}|}{(4 + |a_{n,k}|^2)^{1/2}} \begin{Vmatrix} 2 & a_{n,k} \\ \bar{a}_{n,k} & 2 + |a_{n,k}|^2 \end{Vmatrix}.$$

Можно показать, что если для всех $n\ (\in Z)$ $\alpha_n = (-1)^n \alpha_0$, то алгебра $A_{T_\alpha}^{(0)}$ состоит из всех операторов вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda & \bar{\alpha}_0\mu \\ \alpha_0\mu & \lambda + \mu \end{Vmatrix},$$

где λ и μ — произвольные комплексные числа. В противном случае $A_{T_\alpha}^{(0)} = B(H_0)$.

Доказательство следующего утверждения несущественно отличается от доказательства теоремы 6.

Теорема 7. *Операторы д. в. с. кратности 2 с весовыми последовательностями соответственно*

$$\left\{\begin{Vmatrix} \alpha_n & 1 \\ 0 & \alpha_n \end{Vmatrix}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \text{ и } \left\{\begin{Vmatrix} \beta_n & 1 \\ 0 & \beta_n \end{Vmatrix}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$\alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0,\ n \in Z;\ \sup_n |\alpha_n| < \infty,\ \sup_n |\beta_n| < \infty)$$

унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторого вещественного θ *и некоторого целого* p *выполняется одно из следующих условий: 1)* $\alpha_n = e^{i\theta}\beta_{n+p}$, $n \in Z$; *2)* $\alpha_n = e^{i\theta}\bar{\beta}_{n+p}$, $n \in Z$, *и все числа последовательности* $\{a_{n,0}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *лежат на некоторой окружности в комплексной плоскости.*

Список литературы: **1.** *Shields A.* Weighted shift operators and analytic function theory. — Top. Oper. Theory. Providence. 1974, R. I, p. 49-128. **2.** *Lambert A.* Unitary equivalence and reducibility of invertibly weighted shifts. — Bul. Austral. Math. Soc., 1971, vol. 5, No 2, p. 157-173. **3.** *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М., Наука, 1968. 664 с. **4.** *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М., Мир, 1970. 352 с.