УДК 519.21

И. В. ОСТРОВСКИЙ

О БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

1°. Следуя Б. А. Рогозину [1], будем говорить, что безгранично делимое (б. д.) распределение P допускает безгранично делимую факторизацию (б. д. ф.), если справедливо представление $P = P_+ * P_-$, где P_+ и P_- — б. д. распределения, сосредоточенные соответственно на $[0, +\infty]$ и $(-\infty, 0]$. В [1] было доказано, что б. д. распределение P с характеристической функцией (х. ф.) вида

$$\varphi(t;\ P) = \lambda/(\lambda - \psi(t)), \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, а $\psi(t)$ — логарифм х. ф. б. д. распределения, допускает б. д. ф. Более простое доказательство этого факта дано в работе Д. В. Гусака и В. С. Королюка [2].

Распределения с х. ф. (1) являются частными случаями распределений P с х. ф. вида

$$\varphi(t;\ P) = \gamma(-\psi(t)), \tag{2}$$

где $\gamma(s)$ — преобразование Лапласа б. д. распределения, сосредоточенного на $[0, +\infty)$, а $\psi(t)$ — логарифм х. ф. б. д. распределения. В силу теоремы В. Феллера [3, с. 646) все распределения с х. ф. (2) являются б. д. Настоящая заметка посвящена вопросу о том, при каких условиях такие распределения допускают б. д. ф.

2°. Нам понадобится следующий общий критерий б. д. ф.

Теорема 1. *Для того чтобы б. д. распределение P с х. ф. $\varphi(t;\ P)$ допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} \ln|1/\varphi(t;\ P)|\,dt < \infty. \tag{3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Из равенства $P = P_+ * P_-$ следует, что $\varphi(t;P) = \varphi(t;\ P_+)\,\varphi(t;\ P_-)$. Функции $\varphi(t;\ P_+)$ и $\varphi(t;\ P_-)$ аналитичны и ограничены в полуплоскостях $\operatorname{Im} t > 0$ и $\operatorname{Im} t < 0$ соответственно. Поэтому [4. с. 35]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} \ln|\varphi(t;\ P_\pm)|\,dt < \infty,$$

откуда следует справедливость (3).

Достаточность. По формуле Леви — Хинчина имеем

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i\beta t + \int_{(-\infty,\ \infty)} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx)\right\}, \tag{4}$$

где β — вещественная постоянная; $G(dx)$ — конечная мера. Из этой формулы следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|1/\varphi(t;\ P)|}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{(-\infty,\ \infty)} (1-\cos tx)\,\frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx)\right\}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int_{(-\infty,\ \infty)} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos tx}{1+t^2}\,dt\right\}\frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx) = \pi \int_{(-\infty,\ \infty)} (1-e^{-|x|}) \times$$

$$\times \frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx)$$

(перемена порядка интегрирования законна, так как подынтегральные функции неотрицательны). Поэтому условие (3) равносильно условию

$$\int_{(-\infty,\ \infty)} |x|^{-1} G(dx) < \infty. \tag{5}$$

Положим ($\beta_1 \in R$)

$$\varphi(t;\ P_+) = \exp\left\{i\beta_1 t + \int_{[0,\ \infty)} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx)\right\};$$

$$\varphi(t;\ P_-) = \exp\left\{i(\beta-\beta_1)t + \int\limits_{(-\infty,\ 0)} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1+x^2}{x^2} G(dx)\right\}.$$

Как известно [см., например, 5, с. 69], из (5) следует, что P_+ и P_- являются б. д. распределениями, сосредоточенными на $[a,\ +\infty)$ и $(-\infty,\ b]$ соответственно, где

$$a = \beta_1 - \int\limits_{[0,\ \infty)} x^{-1} G(dx),\ \ b = \beta - \beta_1 + \int\limits_{(-\infty,\ 0)} |x|^{-1} G(dx).$$

Число β_1 можно выбрать таким, чтобы выполнялось $a \geqslant 0,\ b \leqslant 0$. (Заметим, что получить одновременно $a = 0$ и $b = 0$ можно в том и только том случае, когда $\beta = \int\limits_{(-\infty,\ \infty)} x^{-1} G(dx)$.)

Замечание 1. Попутно установлено, что условие (5) является необходимым и достаточным для б. д. ф. Этот факт в несколько иной формулировке был отмечен ранее В. М. Золотаревым [6].

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы 1, она имеет место в сторону необходимости и без требования безграничной делимости. С достаточностью дело обстоит иначе: методы, изложенные в [5, с. 94—97], позволяют построить неразложимые распределения P, не сосредоточенные на полуоси и такие, что условие (3) выполнено.

3°. Будем обозначать через Γ класс всех функций $\gamma(s)$, являющихся преобразованиями Лапласа б. д. распределений, сосредоточенных на $[0,\ +\infty)$, а через Ψ — класс всех функций $\psi(t)$, являющихся логарифмами х. ф. б. д. распределений. Установим наличие б. д. ф. у некоторых классов б. д. распределений с х. ф. вида (2).

Пример 1. Если $\gamma(s) = [\lambda/(\lambda+s)]^\alpha,\ \lambda > 0,\ \alpha > 0$, то при любом $\psi(t) \in \Psi$ б. д. распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. (Как уже отмечалось, при $\alpha = 1$ этот результат был получен в работах [1; 2]).

Действительно, так как всякая функция $\psi(t) \in \Psi$ допускает оценку $\psi(t) = O(t^2),\ t \to \pm\infty$, [см., например, 5, с. 421], то $|1/\gamma(-\psi(t))| \leqslant [(\lambda + |\psi(t)|)/\lambda]^\alpha = O(|t|^{2\alpha})$, и остается применить теорему 1.

Пример 2. Если

$$\gamma(s) = \int\limits_{(0,\ \infty)} [\lambda/(\lambda+s)]\, \sigma(d\lambda), \tag{6}$$

где $\sigma(d\lambda)$ — мера, удовлетворяющая условию $\sigma((0,\ +\infty)) = 1$, то при любом $\psi(t) \in \Psi$ б. д. распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. (Принадлежность функций (6) классу Γ доказана, например, в работе [7, с. 25]. Отметим [7, с. 42], что преобразование Лапласа распределения Парето представляется формулой (6).)

Легко видеть, что функция (6) допускает при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ оценку $|\gamma(s)| \geqslant \operatorname{Re}\gamma(s) \geqslant A(1+|s|)^{-2}$. Так как для всякой функции $\psi(t) \in \Psi$ имеем $\operatorname{Re}\psi(t) \leqslant 0$, $\psi(t) = O(t^2)$, то $|1/\gamma(-\psi(t))| \leqslant (1/A) \times (1+|\psi(t)|)^2 = O(t^4)$, и теорема 1 дает нужный результат.

Пример 3. Если $\gamma(s)$ — преобразование Лапласа логнормального распределения, то при любом $\psi(t) \in \Psi$ б. д. распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. (то, что $\gamma(s) \in \Gamma$, установлено О. Торином [8]).

Достаточно показать, что при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|\gamma(s)| \geqslant C_1 \exp\{-C_2 \ln^3(|s|+1)\}, \tag{7}$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные. Тогда из $\operatorname{Re}\psi(t) \leqslant 0$, $\psi(t) = O(t^2)$ будет следовать $\ln|1/\gamma(-\psi(t))| = O(\ln^3|t|)$, $t \to \pm\infty$, и можно воспользоваться теоремой 1.

Как установлено в работе [8], функция $\gamma(s)$ аналитически продолжается в s-плоскость, разрезанную вдоль луча $s \leqslant 0$, продолженная функция $\gamma(s)$ не имеет там нулей и справедливо представление

$$\gamma(s) = f(\ln s), \tag{8}$$

где $f(z)$ — целая функция, допускающая оценку

$$|f(z)| \leqslant C_3 \exp\{C_4 |z|^2\};\ C_3,\ C_4 > 0.$$

Из классической теоремы об оценке целой функции снизу [9, с. 300] вытекает, что вне кружков $Q_n = \{|z - z_n| \leqslant |z_n|^{-3}$, где z_n — корни функции $f(z)$, справедлива оценка

$$|f(z)| \geqslant C_5 \exp\{-C_6 |z|^3\};\ C_5,\ C_6 > 0. \tag{9}$$

Поскольку $\gamma(s) \neq 0$ в плоскости, разрезанной вдоль луча $s \leqslant 0$, то $f(z) \neq 0$ в полосе $|\operatorname{Im} z| < \pi$. Поэтому полоса $|\operatorname{Im} z| \leqslant \pi/2$ может пересекаться лишь с конечным числом кружков Q_n и, следовательно, после надлежащего изменения постоянных C_5 и C_6 неравенство (9) будет выполняться во всей полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant \pi/2$. В силу (8) отсюда вытекает (7). Заметим, что несколько уточняя рассуждения, можно показать, что (7) можно $\ln^3$ заменить на $\ln^2$.

Пример 4. Пусть $\gamma(s)$ — преобразование Лапласа устойчивого распределения на $[0, \infty)$ с показателем $0 < \alpha < 1$, а $\psi(t)$ — логарифм х. ф. устойчивого распределения с показателем $0 < \beta \leqslant 2$. Тогда б. д. распределение с х. ф. (2) допускает б. д. ф. в том и только том случае, когда $\alpha\beta < 1$. (Таким образом, существуют б. д. распределения с х. ф. (2), не допускающие б. д. ф.)

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из теоремы 1 и известных представлений для $\gamma(s)$ и $\psi(t)$ [см., например, 3, с. 650—651].

4°. Как известно [3, с. 647], всякая функция $\gamma(s) \in \Gamma$ допускает единственное представление

$$\gamma(s) = \exp\left\{\int_{[0,\ \infty)} x^{-1}(e^{-sx} - 1)\, U(dx)\right\}, \tag{10}$$

где подынтегральная функция доопределяется при $x=0$ по непрерывности, а $U(dx)$ — мера на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{[0,\ \infty)} (1+x)^{-1} U(dx) < \infty. \tag{11}$$

Теорема 2: *а) Пусть $\gamma(s) \in \Gamma$ фиксировано. Для того чтобы при любой $\psi(t) \in \Psi$ б. д. распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{[0,\ 1)} (1/\sqrt{x})\, U(dx) < \infty.$$

б) Пусть $\psi(t) \in \Psi$ фиксировано. Для того чтобы при любой $\gamma(s) \in \Gamma$ б. д. распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы б. д. распределение с х. ф. $\exp \psi(t)$ *допускало б. д. ф.*

Доказательство. Пусть $\psi(t) \in \Psi$. Так как $\operatorname{Re} \psi(t) \leqslant 0$, то функция $h_\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} [1 - \operatorname{Re} \exp(x\psi(t))]\, dt$ неотрицательна, ограничена и стремится к нулю при $x \to 0$. Справедливо следующее замечание. Для того чтобы распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{[0,\ 1)} x^{-1} h_\psi(x)\, U(dx) < \infty. \tag{12}$$

Действительно, пользуясь представлением (10), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |1/\gamma(-\psi(t))|}{1+t^2} dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int\limits_{[0,\ \infty)} \operatorname{Re} \frac{1-\exp(x\psi(t))}{x} U(dx) \right\} \times$$

$$\times \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_{[0,\ \infty)} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re} \exp(x\psi(t))}{1+t^2} dt \right\} \frac{U(dx)}{x} =$$

$$= \int\limits_{[0,\ \infty)} x^{-1} h_\psi(x)\, U(dx) \tag{13}$$

(перемена порядка интегрирования законна в силу неотрицательности подынтегральной функции). Из ограниченности функции $h_\psi(x)$ и условия (11) следует, что сходимость последнего интеграла в (13) равносильна условию (12). Поэтому справедливость замечания следует из теоремы 1.

Утверждение «а» доказываемой теоремы в части необходимости следует из того, что при $\psi(t) = -t^2$, $0 < x < 1$ выполняется

$$h_\psi(x) = 2 \int\limits_0^{\infty} \frac{1-\exp(-xt^2)}{1+t^2} dt \geqslant \sqrt{x} \int\limits_1^{\infty} \frac{1-\exp(-y^2)}{y^2} dy.$$

Чтобы доказать «а» в части достаточности, заметим, что из соотношений $\operatorname{Re}\psi(t)\leqslant 0$, $\psi(t)=O(t^2)$ и неравенства $|1-e^z|\leqslant|z|$ $(\operatorname{Re} z\leqslant 0)$ следует, что

$$h_\psi(x)\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant 1/\sqrt{x}}\frac{|1-\exp(x\psi(t))|}{1+t^2}\,dt+\int\limits_{|t|>1/\sqrt{x}}\frac{dt}{1+t^2}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant 1/\sqrt{x}}\frac{|x\psi(t)|}{1+t^2}\,dt+O(\sqrt{x})=O(\sqrt{x})\;x\to 0.$$

Утверждение б) в части необходимости тривиально, так как при $\gamma(s)=e^{-s}$ имеем $\gamma(-\psi(t))=\exp\psi(t)$. Чтобы получить достаточность, покажем, что если б. д. распределение с х. ф. $\varphi(t)=\exp\psi(t)$ допускает б. д. ф., то $h_\psi(x)=O(x)$, $x\to 0$.
Замечая, что

$$\operatorname{Re}(1-\exp(x\psi(t)))=1-\exp(x\operatorname{Re}\psi(t))+$$
$$+\exp(x\operatorname{Re}\psi(t))(1-\cos(x\operatorname{Im} t)),$$

получаем

$$h_\psi(x)\leqslant x\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\operatorname{Re}\psi(t)|}{1+t^2}\,dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(x\operatorname{Im}\psi(t))}{1+t^2}\,dt=xI_1+I_2.$$

Интеграл I_1 сходится, так как $|\operatorname{Re}\psi(t)|=\ln|1/\varphi(t)|$, где $\varphi(t)=\exp\psi(t)$ — х. ф. б. д. распределения, допускающего б. д. ф. Для оценки интеграла I_2 покажем, что наличие б. д. ф. у распределения с х. ф. $\exp\psi(t)$ влечет соотношение

$$\operatorname{Im}\psi(t)=O(|t|),\quad t\to\pm\infty.$$

Обозначая через $G(dx)$ меру, фигурирующую в представлении Леви — Хинчина (4) для функции $\varphi(t;\,P)=\exp\psi(t)$, можем утверждать,— в силу замечания 1 к теореме 1,— что выполняется (5). Поэтому имеем

$$|\operatorname{Im}\psi(t)|=\left|\beta t+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin tx-\frac{tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx)\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\beta||t|+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(|t||x|+\frac{|t||x|}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,G(dx)=O(|t|).$$

Следовательно,

$$I_2\leqslant 2\int\limits_{|t|\leqslant 1/x}\frac{\left[\frac{1}{2}\,x\operatorname{Im}\psi(t)\right]}{1+t^2}\,dt+2\int\limits_{|t|>1/x}\frac{dt}{1+t^2}=O(x),$$

что и завершает доказательство теоремы.

5°. В работе [10] О. Торин ввел подкласс класса б. д. распределений, сосредоточенных на $[0, \infty)$, получивший ряд существенных приложений, в числе которых следует отметить решение проблемы безграничной делимости логнормального распределения [8]. Распределения этого подкласса, названные в статье [10] обобщенными Г-свертками, определяются как б. д. распределения, преобразования Лапласа которых $\gamma(s)$ имеют вид

$$\gamma(s) = \exp\left\{as + \int_{[0, \infty)} \ln\left(\frac{y}{y+s}\right) V(dy)\right\}, \tag{14}$$

где $a \geqslant 0$, а $V(dy)$ — мера, удовлетворяющая условию

$$\int_{[0, \infty)} \ln(1 + 1/y) V(dy) < \infty. \tag{15}$$

Всякая функция $\gamma(s)$, представимая в виде (14), принадлежит классу Г, поэтому для таких $\gamma(s)$ можно поставить вопрос, при каких условиях б. д. распределения с х. ф. (2) допускают б. д. ф.

Теорема 3. *Пусть $\gamma(s)$ является преобразованием Лапласа обобщенной Г-свертки. Для того чтобы при любой $\psi(t) \in \Psi$ б. д. распределение с х. ф. (2) допускало б. д. ф., необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$a = 0, \quad \int_{[0, \infty)} \ln\left(1 + 1/\sqrt{y}\right) V(dy) < \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Положим

$$g_\psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{-1} \ln|1 - \psi(t)/y|\, dt, \quad 0 < y < \infty,$$

и заметим, что из $\operatorname{Re}\psi(t) \leqslant 0$ следует, что функция $g_\psi(y)$ неотрицательна. Как и при доказательстве теоремы 2 получаем, что наличие б. д. ф. у распределения с х. ф. (2) равносильно условию

$$a \int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{-1} |\operatorname{Re}\psi(t)|\, dt + \int_{[0, \infty)} g_\psi(y) V(dy) < \infty.$$

Полагая $\psi(t) = -t^2$ и замечая, что в этом случае

$$g_\psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + t^2/y)}{1 + t^2} dt = \pi \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

убеждаемся в необходимости условий (16). Так как из $\psi(t) = O(t^2)$ следует, что справедлива оценка

$$g_\psi(y) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + ct^2/y)}{1 + t^2} dt = \pi \ln\left(1 + \sqrt{\frac{c}{y}}\right)$$

(c — положительная постоянная), то условия (16) являются достаточными для б. д. ф.

Список литературы: 1. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями.— Теор. вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, вып. 4, с. 656—670. 2. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* О совместном распределении процесса с независимыми приращениями и его максимума.— Теор. вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, вып. 3, с. 421—430. 3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., Мир, 1967. 752 с. 4. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. М., ИЛ, 1955. 268 с. 5. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. М., Наука, 1972. 480 с. 6. *Золотарев В. М.* Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов.— Теор. вероятн. и ее примен., 1958, т. 3, вып. 2, с. 197—200. 7. *Steutel F. W.* Preservation of infinite divisibility under mixing and related topics. Amsterdam, Math. Centrum, 1970. 99 p. 8. *Thorin O.* On the infinite divisibility of the lognormal distribution.— Scand. Actuar J., 1977, vol. 3, p. 121—148. 9. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., ГИТТЛ, 1951. 508 с. 10. *Thorin O.* On the infinite divisibility of tbe Pareto distribution.— Scand. Actuar. J., 1977, vol. 3, p. 31-40.

Поступила 20 марта 1979 г.