УДК 517.521

В. И. МЕЛЬНИК, канд. физ.-мат. наук

НЕЭФФЕКТИВНОСТЬ И РЕВЕРСИВНОСТЬ БЛИЗКИХ МАТРИЦ

На множестве консервативных матриц $A=(a_{nk})$, n, $k=0, 1, \ldots$ будем использовать нормы $\| A \| = \sup\limits_n \sum\limits_k | a_{nk} |$, $\| A \|_* = \overline{\lim\limits_n} \sum\limits_k | a_{nk} |$. В заметке сравниваются между собой свойства консервативных матриц A и B, которые близки в смысле $\| \cdot \|_*$-нормы. Обнаружено, что полная и ограниченная неэффективность матрицы [1, с. 189] сохраняется и для близких матриц, в то время как реверсивность [2, п. 18] может не сохраняться при переходе к близкой матрице.

Теорема 1. *Пусть консервативная нормальная матрица A вполне неэффективна. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что любая консервативная нижняя треугольная матрица B, удовлетворяющая условию*

$$\| A - B \|_* < \delta, \tag{1}$$

также вполне неэффективна. (Данная теорема достаточно хорошо известна и приведена здесь для полноты картины).

Теорема 2. *Пусть консервативная матрица A ограниченно неэффективна. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что любая консервативная матрица B, удовлетворяющая условию* (1), *также ограниченно неэффективна.*

Теорема 3. *Существуют консервативные матрицы A и B такие, что $\| A - B \|_* = 0$ и матрица A реверсивна, а матрица B нереверсивна.*

Отметим, что ранее близкие матрицы A и B изучались, как правило, независимо друг от друга. Примером могут служить известные работы Мерсера и Щура о преобразованиях $y_n' = \alpha x_n + (1 - \alpha)(x_0 + x_1 + \ \ldots \ + x_{n-1})/n$; $y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha)(x_0 + x_1 + \ \ldots \ x_n)/(n + 1)$, удовлетворяющих условию $\| A - B \|_* = 0$. Еще одним примером полезности теорем 1 и 2 служат преобразования $y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha) t_n$, $y_n' = \alpha x_n + (1 - \alpha) t_{m(n)}$, где t_n обозначает средние Хаусдорфа [3, гл. XI]. Первое из этих преобразований само есть среднее Хаусдорфа, и его неэффективность легко изучается на основе общих теорем Рогозинского [4, с. 122], в то время как второе из них не есть преобразование Хаусдорфа, и изучение его неэффективности провести сложнее. В то же время эта пара преобразований при некоторых ограничениях удовлетворяет условию $\| A - B \|_* = 0$, и применимы теоремы 1 и 2. Частные случаи теоремы 2 получали Буданицкий [5] и Соколенко [6].

Во второй части работы исследована реверсивность некоторого класса верхних треугольных матриц.

Для доказательства теоремы 1 используем известный результат [2, п. 35, 1] о том, что нормальная матрица A вполне неэффективна тогда и только тогда, когда A^{-1} есть консервативная матрица. Выберем $\delta = \| A^{-1} \|^{-1}$, и пусть матрица B удовлетворяет условию (1). В этом случае можно заменить конечное число начальных строк матрицы B так, чтобы вновь полученная матрица B_0 осталась нижней треугольной матрицей и удовлетворяла условию $\| A - B_0 \| < \delta$. Так как $\| A^{-1} (B_0 - A) \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| B_0 - A \| < 1$, то справедливы вычисления [1, с. 43]

$$B_0^{-1} = (A + (B_0 - A))^{-1} = (E + A^{-1} (B_0 - A))^{-} A^{-1} =$$

$$= (E - A^{-1} (B_0 - A) + (A^{-1} (B_0 - A))^2 - \ \ldots) A^{-1}. \tag{2}$$

Поскольку B_0 и A — консервативные нижние треугольные матрицы, то из формулы (2) следует, что B_0^{-1} — также консервативная нижняя треугольная матрица. Отсюда для любой последовательности $x = (x_0, x_1, \ldots)$ получим $x = (B_0^{-1} B_0)\, x = B_0^{-1}(B_0 x)$, и если $B_0 x$ — сходящаяся последовательность, то x — также сходящаяся последовательность. Следовательно, матрица B_0, а с ней и матрица B, вполне неэффективна.

Для доказательства теоремы 2 в пространстве ограниченных последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots, x_k \ldots)$ используем нормы $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$, $\|x\|_* = \overline{\lim\limits_k} |x_k|$. А. Л. Брудно [7] показал, что регулярная матрица A ограниченно неэффективна тогда и только тогда, когда $\mu(A) = \inf\limits_{\|x\|_*>0} \|Ax\|_* \|x\|_*^{-1} > 0$. Для консервативной матрицы $A = (a_{nk})$ ограниченная неэффективность имеет место тогда и только тогда, когда матрица $\widetilde{A} = (a_{nk} - \alpha_k)$, $\alpha_k = \lim\limits_n a_{nk}$, $(n, k = 0, 1, \ldots)$ ограниченно неэффективна. Поэтому условие ограниченной неэффективности для консервативной матрицы A приобретает вид [см. 8]

$$\mu(A) = \inf_{\|x\|_*>0} \|x\|_*^{-1} \overline{\lim_n} \left| \sum_k (a_{nk} - \alpha_k)\, x_k \right| > 0.$$

Для любых консервативных матриц A и B установим неравенство

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \|A - B\|_*. \tag{3}$$

Из тождества $\sum\limits_k (a_{nk} - \alpha_k)\, x_k = \sum\limits_k (b_{nk} - \beta_k)\, x_k + \sum\limits_k (a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k)\, x_k$ $(\beta_k = \lim\limits_n b_{nk})$ при $\|x\|_* > 0$ найдем

$$\|x\|_*^{-1} \overline{\lim_n} \left| \sum_k (a_{nk} - \alpha_k)\, x_k \right| \leqslant \|x\|_*^{-1} \overline{\lim_n} \left| \sum_k (b_{nk} - \beta_k)\, x_k \right| + \\ + \|x\|_*^{-1} \overline{\lim_n} \left| \sum_k (a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k)\, x_k \right|. \tag{4}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $k_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ такой, что

$$\left| \sum_k (a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k)\, x_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{k_0(\varepsilon)} |a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k| \, \|x\| + \\ + \sum_{k=k_0(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k| \, (\|x\|_* + \varepsilon),$$

откуда

$$\overline{\lim_n} \left| \sum_k (a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k)\, x_k \right| \leqslant \\ \leqslant (\|x\| + \varepsilon) \left(\overline{\lim_n} \sum_{k=k_0(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| + \sum_{k=k_0(\varepsilon)+1}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k| \right).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и условия $k_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ отсюда следует, что $\overline{\lim_n} \left| \sum_k (a_{nk} - \alpha_k - b_{nk} + \beta_k) x_k \right| \leqslant \| x \|_* \| A - B \|_*$, а это вместе с неравенством (4) приводит к неравенству $\mu(A) \leqslant \leqslant \mu(B) + \| A - B \|_*$. Меняя ролями матрицы A и B, получим $\mu(B) \leqslant \mu(A) + \| A - B \|_*$, что вместе с предыдущим неравенством доказывает (3).

Теорема 2 легко следует из неравенства (3). Достаточно взять $\delta = \mu(A) > 0$, и тогда из (1) и (3) следует, что $\mu(B) > 0$, и матрица B ограниченно неэффективна.

Теорему 3 докажем, рассматривая пример. Пусть

$$A = E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

причем $\lim_n \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Матрица B переводит последовательность $(1, -1/\varepsilon_1, 1/\varepsilon_1\varepsilon_2, -1/\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \ldots)$ в нулевую последовательность $(0, 0, 0, \ldots)$, и потому B — не реверсивная матрица. Выполнение условия $\| A - B \|_* = 0$ очевидно. Теорема 3 доказана. Любопытно отметить, что матрица B имеет единственную двустороннюю обратную матрицу

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 & \ldots \\ 0 & 1 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_2\varepsilon_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & -\varepsilon_3 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

которая является консервативной и не определяет обратного преобразования.

Еще один интересный пример получится, если выбрать $\varepsilon_n = = -2$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Тогда $\| B^{-1} \| = \infty$, и одновременно матрица B вполне неэффективна (в этом легко убедиться, если вычеркнуть первый столбец матрицы B и использовать теорему Агнью [9]). Вопрос о существовании матрицы B с такими свойствами предложили Виланский и Целлер [10].

В оставшейся части работы изучается реверсивность класса матриц $A = (a_{nk})$, $n, k = 0, 1, \ldots$, элементы которых определены соотношениями:

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant k < n; \\ \alpha_n \text{ при } k = n; \\ (1 - \alpha_n) q_k / Q_{n+1} \text{ при } n < k, \end{cases} \tag{5}$$

где $Q_n = \sum_{k=n}^{\infty} q_k$, а $(q_0, q_1, \ldots)$ — данная последовательность чисел, удовлетворяющая условию $\sum_{k=n}^{\infty} |q_k| = O(Q_n)$. Неэффективность матриц этого класса изучалась в работе Мельника [11]. Для упрощения рассуждений на последовательности $(q_0, q_1, \ldots)$ и $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ наложим условия:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_n = O(1),\ 1/\alpha_n = O(1),\ \alpha_n \neq 1; \\ &q_n \neq 0,\ Q_n \neq 0,\ q_n - \alpha_n Q_n \neq 0\ (n = 0, 1, \ldots), \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

при которых матрица A регулярна.

Теорема 4. *Для того чтобы матрица A, определенная условиями (5) и (6), была реверсивной, необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$\text{а)}\ \overline{\lim_n}\left| Q_{n+1} \prod_{\nu=0}^{n}\left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)^{-1}\right| > 0, \tag{7}$$

$$\text{б)}\ \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left|\frac{q_\sigma}{Q_\sigma}\prod_{\nu=0}^{\sigma-1}\left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)\right| < +\infty,^* \tag{8}$$

$$\text{в)}\ \overline{\lim_n}\ Q_{n+1}\sum_{\sigma=n+1}^{\infty}\left|\frac{q_\sigma}{Q_\sigma}\prod_{\nu=n+1}^{\sigma-1}\left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)\right| < \infty. \tag{9}$$

Обозначим $Ax = y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$. Тогда

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)\, t_{n+1}\ (n = 0, 1, \ldots), \tag{10}$$

где $t_n = (q_n x_n + q_{n+1}x_{n+1} + \ \ldots)/Q_n$. Отсюда

$$x_n = (Q_n t_n - Q_{n+1} t_{n+1})/q_n \tag{11}$$

и

$$y_n = \frac{\alpha_n Q_n}{q_n} t_n + \left(1 - \frac{\alpha_n Q_n}{q_n}\right) t_{n+1}. \tag{12}$$

Для того чтобы уравнение

$$y = Ax \tag{13}$$

при любом данном y имело не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы из $Ax = 0$ следовало $x = 0$ (здесь 0 обозначает нулевую последовательность). Если $y_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то из уравнения (12) можно последовательно выразить все t_n через t_0:

$$t_{n+1} = t_0 \prod_{\nu=0}^{n} (1 - q_\nu/\alpha_\nu Q_\nu)^{-1}\ (n = 0, 1, \ldots).$$

---

* По определению считаем, что $\prod\limits_{\nu=0}^{-1} = 1$.

Далее x_n найдем из уравнений (11). Теперь координаты преобразованной последовательности $z = Ax$ вычисляются следующим образом:

$$z_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_{n+1}^{-1} \lim_m \sum_{k=n+1}^{m} q_k x_k =$$
$$= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) Q_{n+1}^{-1} \lim_m (Q_{n+1} t_{n+1} - Q_{m+1} t_{m+1}),$$

или

$$z_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) t_{n+1} - (1 - \alpha_n) Q_{n+1}^{-1} \lim_m Q_{m+1} t_{m+1}. \qquad (14)$$

Из уравнений (12) (с $y_n = 0$), (11) и (14) получаем, что условие $z = 0$ эквивалентно условию

$$\lim_m Q_{m+1} t_{m+1} = \lim_m t_0 Q_{m+1} \prod_{\nu=0}^{m} (1 - q_\nu / \alpha_\nu Q_\nu)^{-1} = 0. \qquad (15)$$

Если условие (7) выполнено, то из условия (15) следует, что $t_0 = 0$, а тогда $x = 0$. Если же условие (7) не выполнено, то условие (15) имеет место при любом t_0, и тогда существуют ненулевые последовательности x, для которых $Ax = 0$. Итак, условие (7) необходимо и достаточно для того, чтобы из $Ax = 0$ следовало $x = 0$, т. е. чтобы уравнение (13) имело не более одного решения при любом y.

Изучим теперь существование решения уравнения (13) при любой данной сходящейся последовательности y. Достаточно рассмотреть случай, когда $\lim_n y_n = 0$. Из уравнения (12) можно последовательно выразить все t_n через y_n и t_0 и получить формулу

$$t_{n+1} = t_0 \prod_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)^{-1} - \sum_{\sigma=0}^{n} \frac{q_\sigma y_\sigma}{\alpha_\sigma Q_\sigma} \prod_{\nu=\sigma}^{n} \left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)^{-1}$$
$$(n = 0,\ 1,\ \ldots). \qquad (16)$$

Поступая, как и выше, числа x_n определим по формуле (11), а тогда координаты преобразованной последовательности $z = Ax$ выразятся по формуле (14). Из уравнений (12), (11) и (14) получим, что условие $z = y$ эквивалентно условию

$$\lim_m Q_{m+1} t_{m+1} = \lim_m Q_{m+1} \prod_{\nu=0}^{m} \left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)^{-1} \left(t_0 - \sum_{\nu=0}^{m} \frac{q_\sigma y_\sigma}{\alpha_\sigma Q_\sigma} \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{\nu=0}^{\sigma-1} \left(1 - \frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)\right) = 0. \qquad (17)$$

Если условие (7) выполнено, а условие (8) не выполнено, то можно найти сходящуюся последовательность y, для которой

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{q_\sigma y_\sigma}{\alpha_\sigma Q_\sigma} \prod_{\nu=0}^{\sigma-1}\left(1-\frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right)=+\infty,$$

тогда условие (17) не имеет места ни при каком выборе t_0, и решение уравнения (13) не существует. Если же условия (7), (8) выполнены, то положим

$$t_0=\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{q_\sigma y_\sigma}{\alpha_\sigma Q_\sigma} \prod_{\nu=0}^{\sigma-1}\left(1-\frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right). \tag{18}$$

Тогда условие (17) эквивалентно условию (9). Теорема 4 доказана.

Наконец, полезно отметить, что обратное преобразование имеет вид

$$x_n=\frac{1}{\alpha_n} y_n+\left(1-\frac{1}{\alpha_n}\right) \sum_{\sigma=n+1}^{\infty} \frac{q_\sigma y_\sigma}{\alpha_\sigma Q_\sigma} \prod_{\nu=n+1}^{\sigma-1}\left(1-\frac{q_\nu}{\alpha_\nu Q_\nu}\right). \tag{19}$$

Эта формула следует из формул (11), (16) и (18).

Из теоремы 4 можно получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть матрица A определяется условиями (5), (6). Дополнительно предположим, что* $q_n>0$, $\alpha_n=\alpha$ $(n=0, 1, \ldots)$, $\lim\limits_n q_n/Q_n=0$. *Тогда матрица A является реверсивной, если* $\operatorname{Re} 1/\alpha>1$, *и не является реверсивной, если* $\operatorname{Re} 1/\alpha<1$. *При условии* $\operatorname{Re} 1/\alpha>1$ *обратное преобразование (19) регулярно, а матрица A вполне неэффективна.*

Список литературы: 1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960. 470 с. 2. *Zeller K., Beekmann* W. Theorie der Limitierungs. S. l. Springer-Verl., 1970. 3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951. 504 с. 4. *Pitt H. R.* Tauberian theorems. Oxford Univ. Press, 1958. 435 p. 5. *Буданицкий Э. Г.* Теоремы типа Мерсера для произвольных регулярных методов суммирования.— Вестн. Моск. ун-та, 1969, № 6, с. 73—77. 6. *Соколенко А. И.* О K-матрицах, равносильных сходимости.— Приближенные методы мат. анализа. Киев, 1974, с. 117—127. 7. *Брудно А. Л.* Относительные нормы матриц Теплица.— Докл. АН СССР, 1953, № 2, с. 197—200. 8. *Михалин Г. А.* Некоторые вопросы включения, равносильности и совместности линейных методов суммирования. Автореф. дис. ... канд. мат. наук. Киев, 1974. 18 с. 9. *Agnew R.* Equivalence of methods for evaluation of sequences.— Proc Amer. Math. Soc., 1952, vol. 3, p. 550-557. 10. *Wilansky A., Zeller K.* The inverse matrix in summability: reversible matrices.— J. London Math. Soc., 1957, vol. 32, N 4, p. 397-408. 11. *Мельник В. И.* Неэффективность матриц, построенных на основе матрицы взвешенных средних арифметических. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 33, с. 93—99.

Поступила 16 февраля 1976 г.