

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИИ ЭКСПОНЕНТ

В настоящей работе исследуются вопросы полноты и базисности в пространстве $L^2(0, \pi)$ системы линейных комбинаций экспонент

$$\left\{ \alpha \sin nt + \sum_{k=1}^N c_k e^{-a_k n t} \right\}_{n=1}^{\infty}, \operatorname{Re} a_k > 0. \quad (1)$$

Наряду с тем, что эти вопросы представляют самостоятельный интерес, они тесно связаны с задачами интерполяции целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.), а также являются модельными для ряда задач о свойствах корневых систем пучков дифференциальных операторов. В то время, как имеется довольно много работ, посвященных системам экспонент вида $\{e^{i\lambda_n t}\}_n$ (обзор см., например, в работе [1]), более общие системы линейных комбинаций экспонент изучены сравнительно мало, исследование каждой из таких систем требует привлечения своих отдельных методов. Отметим здесь работы [2—5], относящиеся к этому кругу вопросов.

Исследование полноты и базисности системы (1) мы сводим к исследованию спектра специального сингулярного оператора в пространстве $L^2(0, \pi)$. Для простоты все рассуждения будем вести для системы функций

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha \sin nt + e^{-ant}\}_{n=1}^{\infty}, a > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим оператор

$$K_a: \varphi(t) \rightarrow \frac{1}{i\pi} \int_0^{\pi} \varphi(\tau) \left\{ \frac{1}{1 - e^{i(t-i\alpha\tau)}} - \frac{1}{1 - e^{-i(t+i\alpha\tau)}} \right\} d\tau. \quad (3)$$

Ограниченность этого оператора в пространстве $L^2(0, \pi)$ может быть легко доказана различными способами. Она вытекает, например, из работ [6; 7]. Ниже мы оценим норму этого оператора. Обозначим через $\sigma_0(K_a)$ и $\sigma(K_a)$ собственный и полный спектр оператора K_a .

Теорема 1. 1°. Для того чтобы система (2) была полна в пространстве $L^2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \in \sigma_0(K_a)$. 2°. Для того чтобы система (2) была базисом Рисса в пространстве $L^2(0, \pi)$, достаточно, чтобы $\alpha \in \sigma(K_a)$.

Доказательство теоремы основано на следующих предложениях: а) равенство

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) \varphi_n(t) dt = 0, n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

выполняется для некоторой функции $\varphi(t) \in L^2(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда $(\alpha I - K_a)\varphi = 0$; б) равенства

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) \varphi_n(t) dt = \delta_{k,n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

для некоторой функции $\varphi(t) \in L^2(0, \pi)$ выполняются тогда и только тогда, когда $(\alpha I - K_a) \varphi = \sin kt$.

Утверждение 1⁰ теоремы очевидно следует из п. «а». Покажем, как из «б» следует 2⁰. В самом деле, из «б» следует, что если $\alpha \notin \sigma(K_a)$, то система (2) имеет биортогональную $\varphi_k = (\alpha I - K_a)^{-1} \sin kt$. (Таким образом, оператор $(\alpha I - K_a)^{-1}$ играет роль оператора преобразования, переводящего систему $\{\sin kt\}$ в систему, биортогональную к (2)). Для доказательства того, что (2) есть базис Рисса, достаточно доказать [см., например, 8] бесселевость систем $\{\varphi_n\}$, $\{\varphi'_n\}$, т. е. сходимость рядов

$$\sum_n |(\psi, \varphi_n)|^2, \quad \sum_n |(\psi, \varphi'_n)|^2$$

для любой функции $\psi \in L^2(0, \pi)$ (мы считаем, что полнота системы (2) уже доказана в первой части теоремы 1).

Рассмотрим пространство $L^2_{[0, -i\pi]}$, состоящее из ц. ф. э. т. $F(\lambda)$ таких, что $F(\lambda) \in L^2(\mathbf{R})$ и индикаторная диаграмма функции $F(\lambda)$ содержится в отрезке $[0, -i\pi]$ мнимой оси. Для любой функции $\Psi \in L^2_{[0, -i\pi]}$ ряды $\sum_1^\infty |\Psi(\pm k)|^2$, $\sum_1^\infty |\Psi(ik)|^2$ сходятся [см., например, 9]. Выбирая в качестве $\Psi(\lambda)$ функцию

$\Psi(\lambda) = \int_0^\pi e^{i\lambda t} \psi(t) dt$, мы получаем отсюда сходимость ряда $\sum |(\varphi_n,$

$\psi)|^2$, построенного по функции $\psi \in L^2(0, \pi)$. Бесселевость системы $\{\varphi_n\}$ следует из того, что эта система есть результат применения ограниченного оператора $(\alpha I - K_a)^{-1}$ к (очевидно) бесселевой системе $\{\sin nt\}$. Легко видеть, что при действии ограниченного оператора бесселевость сохраняется.

Таким образом, теорема 1 следует из предложений «а» и «б». Для доказательства предложения «а» заметим, что для любой функции $\varphi \in L^2(0, \pi)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi_n \rangle &= \int_0^\pi \varphi(t) (e^{-\alpha nt} + \alpha \sin nt) dt = \\ &= \int_\Gamma \xi^{n-1} \omega_\varphi(\xi) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Gamma = \{z: |z| = 1\} \cup [e^{-\alpha t}, 1]$,

$$\omega_\varphi(e^{\pm it}) = \mp \frac{\alpha}{2} \varphi(t); \quad \omega_\varphi(e^{-\alpha t}) = \varphi(t); \quad t \in (0, \pi). \quad (7)$$

Обозначим $G = \{z: |z| < 1, z \in [e^{-\alpha\pi}, 1]\}$. Функция $\omega_\varphi(\xi)$ интегрируема в квадрате на Γ . Поэтому из равенств (4), (6) следует [см., например, 10] существование функции $\Omega_1(z)$, принадлежа-

щей пространству В. И. Смирнова $E^2(G)$, предельные значения которой удовлетворяют соотношениям*

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(e^{\pm it}) &= \omega_\varphi(e^{\pm it}) = \mp \frac{a}{2} \varphi(t); \quad t \in (0, \pi) \\ \Omega_1(e^{-at} + i0) - \Omega_1(e^{-at} - i0) &= \omega_\varphi(e^{-at}) = \frac{1}{a} \varphi(t); \quad t \in (0, \pi). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Равенство

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Omega_1(z), & |z| < 1 \\ -\Omega_1\left(\frac{1}{z}\right), & |z| \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

определяет функцию, голоморфную в $\overline{C} \setminus [e^{-a\pi}, e^{a\pi}]$ и такую, что при всех $z \in [e^{-a\pi}, e^{a\pi}]$ справедливо равенство

$$\Omega(z) = -\Omega\left(\frac{1}{z}\right). \quad (10)$$

На отрезке $[e^{-a\pi}, e^{a\pi}]$ функция $\Omega(z)$ имеет предельные (в смысле пространства L^2) значения, удовлетворяющие соотношению:

$$\Omega(e^{\pm at} + i0) - \Omega(e^{\pm at} - i0) = \frac{1}{a} \varphi(t). \quad (11)$$

Этим соотношением функция $\Omega(z)$ определяется с точностью до константы и восстанавливается с помощью интеграла Коши, который заменой переменных сводится к виду

$$\Omega(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \left\{ \frac{1}{1 - ze^{at}} + \frac{1}{1 - ze^{-at}} \right\} dt + C.$$

Константу C выбираем так, чтобы выполнялось равенство (10):

$$C = -\frac{1}{2i\pi} \int_0^\pi \varphi(t) dt. \text{ Окончательно получаем}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^\pi \varphi(\tau) \left\{ \frac{1}{1 - ze^{a\tau}} - \frac{1}{1 - \frac{e^{a\tau}}{z}} \right\} d\tau. \quad (12)$$

Подставляя в это равенство $z = e^{it}$ и используя первое из соотношений (8), получаем предложение «а».

Предложение «б» доказывается аналогично. Из равенств (5) для некоторой функции $\varphi(t) \in L^2(0, \pi)$ следует существование функции $\Omega_1(z) \in E^2(G)$, удовлетворяющей соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(e^{\pm it}) + e^{\pm int} &= \omega_\varphi(e^{\pm it}); \quad t \in (0, \pi); \\ \Omega_1(e^{-at} + i0) - \Omega_1(e^{-at} - i0) &= \omega_\varphi(e^{-at}); \quad t \in (0, \pi). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

* Применяемый здесь прием, сводящий задачу о полноте к задаче о существовании аналитической функции, был предложен в 1971 г. в неопубликованной работе В. П. Гурария. Независимо этот прием был предложен А. А. Шкаликовым [4].

Соответственно функция $\Omega(z)$ определяется равенствами

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Omega_1(z) + z^n; & |z| < 1; \\ \Omega_1\left(\frac{1}{z}\right) - z^{-n}; & |z| \geq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Эта функция представима в виде $\Omega(z) = \Omega_0(z) + z^n - z^{-n}$, где функция $\Omega_0(z)$ регулярна в $\bar{C} \setminus [e^{-a\pi}, e^{a\pi}]$ и имеет на границах предельные (в смысле L^2) значения, удовлетворяющие соотношениям

$$\Omega_0(e^{\pm at} + i0) - \Omega_0(e^{\pm at} - i0) = \omega_\varphi(e^{-at}). \quad (15)$$

Дальнейшие рассуждения, доказывающие предложение «б», повторяют с незначительными изменениями рассуждения, проведенные выше. Теорема 1 доказана.

Отметим, что аналогичные факты могут быть установлены и для пространств $L^p(0, \pi)$ при $1 < p < \infty$.

Из теоремы 1 следует что при $|\alpha| \leq \|K_a\|$ система (2) является базисом Рисса в пространстве $L^2(0, \pi)$. Оценим величину $\|K_a\|$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Положим $c_k = \int_0^1 t^k \psi(t) dt$ для некоторой функции $\psi \in L^2(0, \pi)$. Справедливо неравенство

$$\sum |c_k|^2 \leq 4 \int_0^1 |\psi(t)|^2 dt. \quad (16)$$

Доказательство. Числа c_k совпадают со значениями в положительных целых точках функции $c(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda\tau} \psi(e^\tau) d\tau$,

принадлежащей пространству Харди H_2^+ в правой полуплоскости. Сходимость ряда $\sum |c(k)|^2$ (и более общее утверждение) доказана в лемме 2.6 работы [9]. Сопровождая рассуждения этой леммы оценками получающихся в условиях нашей задачи констант, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty |c(k)|^2 &\leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty |c(i\tau)|^2 d\tau = 4 \int_{-\infty}^0 |\psi(e^\tau)|^2 e^{2\tau} d\tau \leq \\ &\leq 4 \int_0^1 |\psi(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Положим

$$\psi_\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \varphi\left(-\frac{1}{a} \ln x\right); & e^{-a\pi} \leq x \leq 1; \\ 0; & 0 \leq x < e^{-a\pi}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_\varphi \in L^2(0, 1)$ и $\|\psi_\varphi\|_{(0, 1)} \leq \|\varphi\|_{(0, \pi)}$. Оператор K_a представим в виде $K_a = K_a^+ - K_a^-$, где

$$(K_a^\pm \varphi)(t) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{\psi_\varphi(x)}{x - e^{\pm it}} dx. \quad (17)$$

Правая часть равенства (17) доопределяет оператор $K_a^\pm \varphi$ на отрезок $(-\pi, 0)$ таким образом, что $(K_a^\pm \varphi)(t) = (K_a^\mp \varphi)(-t)$. Поэтому

$$\|K_a \varphi\|_{L^2(0, \pi)} \leq \sqrt{2} \|K_a^+ \varphi\|_{L^2(-\pi, \pi)}. \quad (18)$$

Функция

$$F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \psi(x) \frac{dx}{x-z} = \frac{1}{i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^1 x^k \psi(x) dx$$

принадлежит пространству Харди во внешности круга $|z| \geq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \|K_a^+ \varphi\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 &= \|F(e^{it})\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \int_0^1 \psi_\varphi(x) x^k dx \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{10}{\pi} \|\psi_\varphi(x)\|_{L^2(0, 1)}^2 \leq \frac{10}{\pi} \|\varphi(t)\|_{L^2(0, \pi)}^2. \end{aligned}$$

Окончательно имеем $\|K_a\| \leq 2 \sqrt{\frac{5}{\pi}}$. Таким образом доказана

Теорема 2. При $|\alpha| > 2 \sqrt{\frac{5}{\pi}}$ система (2) является базисом Рисса в $L^2(0, \pi)$.

Теорема 3. Пусть $\{c_j\}_{j=1}^N$ произвольные комплексные числа, а числа $\{a_j\}_{j=1}^N$ таковы, что $\operatorname{Re} a_j > 0$ и $\arg a_j \neq \arg a_k, k \neq j$. Тогда:

1°. Для полноты системы (1) в пространстве $L^2(0, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы число α не являлось собственным значением оператора $K: L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$ определенного равенством

$$(K\varphi)(t) = \frac{1}{i\pi} \sum_{k=1}^N c_k \int_0^\pi \varphi(\tau) \left\{ \frac{1}{1 - e^{it + a_k \tau}} - \frac{1}{1 - e^{-it + a_k \tau}} \right\} d\tau. \quad (19)$$

2°. Для того чтобы система (1) являлась базисом Рисса в пространстве $L^2(0, \pi)$, достаточно, чтобы α не принадлежало спектру оператора K .

Известно, что теоремы о базисности двойственны теоремам об интерполяции. Приведем интерполяционную теорему, получающуюся из утверждения 2° теоремы 3 прямым применением результатов работы [11].

Теорема 4. Пусть комплексное число α не принадлежит спектру оператора $K: L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$, определенного равенством (19).

Тогда оператор T , действующий из пространства $L^2_{(0,-i\pi)}$ в пространство последовательностей по правилу

$$T[F] = \left\{ \frac{\alpha}{2} (F(k) - F(-k)) + \sum_{j=1}^N c_j F(ia_j k) \right\}_{k=1}^{\infty},$$

является изоморфизмом между пространствами $L^2_{(0,-i\pi)}$ и l^2 .

Эта теорема отличается от обычных интерполяционных теорем тем, что в ней интерполируются линейные комбинации значений функции в нескольких точках.

Список литературы: 1. Никольский Н. К. Базисы из инвариантных пространств и операторная интерполяция.—Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, т. 130, с. 50—123. 2. Джавадов М. Г. О полноте некоторой части собственных функций несамосопряженного оператора.—Докл. АН СССР, 1964, № 4, с. 723—725. 3. Левин Б. Я. Целые функции. М., Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971. 98 с. 4. Шкаликов А. А. Об одной системе функций.—Мат. заметки, 1975, т. 18, вып. 6, с. 855—860. 5. Радзиевский Г. В. О базисности производных цепочек.—Изв. АН СССР. Серия мат., 1975, т. 39, № 5, с. 1182—1218. 6. Gabriel R. M. An inequality concerning the integrals of positive subharmonic functions along certain curves.—J. London Math. Soc., 1930, vol. 5, p. 16-24. 7. Carleson L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem.—Ann. Math., 1962, vol. 76, N 3, p. 547-559. 8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., Наука, 1965. 448 с. 9. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция специальными классами целых функций и связанные с ней разложения в ряды Дирихле.—Изв. АН СССР. Серия мат., 1975, т. 39, с. 657—702. 10. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950. 336 с. 11. Коробейник Ю. Ф. О безусловных базисах в гильбертовом пространстве.—Мат. заметки, 1976, т. 19, вып. 2, с. 259—266.

Поступила 10 декабря 1978 г.