УДК 517.4

И. Е. ОВЧАРЕНКО

О РАЗЛОЖЕНИИ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ И ОПЕРАТОРОВ; ПОЛУЧЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ. III

Настоящая работа является продолжением работ [1—3]. Интегральные представления эрмитовых форм, приведенные в статьях [2; 3], распространяются на случай, когда основной оператор имеет конечнократный спектр. Это позволяет получить интегральные представления матрично-значных положительно определенных функций. В конце работы получены специальные интегральное и операторное представления аналитических в единичном бикруге функций с неотрицательной вещественной частью.

1. Пусть Φ_1 и Φ_2 — линейные множества, на тензорном произведении которых $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ определена неотрицательная эрмитова билинейная форма $<\varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2>$. Гильбертово пространство, получаемое при пополнении $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ по форме $<,>$, будем обозначать через H. Пусть на Φ_1 задана некоторая неотрицательная эрмитова билинейная форма $(\varphi_1, \varphi_2)_\mu$, такая что при любом $\psi \in \Phi_2$

$$<\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi> \leqslant C_\psi (\varphi, \varphi)_\mu. \tag{1}$$

Гильбертово пространство, получаемое при пополнении Φ_1 по форме $(,)_\mu$, будем обозначать через H_μ и называть *определяющим пространством* для пары (H, A_1), если: 1) оператор $\overline{A}_1$ — замыкание оператора A_1 в гильбертовом пространстве H_μ — самосопряженный оператор, имеющий спектр конечной кратности m; 2) оператор $\hat{A}_1 = A_1 \otimes I_2$ эрмитов в гильбертовом пространстве H.

В дальнейшем предполагается, что пара (H, A_1) обладает определяющим пространством H_μ.

Ниже у нас встретится следующая ситуация. Имеется линейное множество L и некоторое гильбертово пространство E ($\dim E \leqslant \leqslant \infty$). Пусть каждой паре элементов $f, g \in L$ сопоставлен оператор $S_{g^*, f} \in [E]^*$, причем $S_{g^*, f} = S^*_{f^*, g}$; $S_{g^*, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2} = \lambda_1 S_{g^*, f_1} + \lambda_2 S_{g^*, f_2}$; $S_{f^*, f} \geqslant 0$. Будем говорить тогда, что на L задано $\{S; E\}$ — скалярное произведение ($\boldsymbol{H}$ — скалярное произведение). Изучение «геометрии» таких пространств и специальных классов операторов в них представляет, как нам кажется, самостоятельный интерес.

---

* Через $[E]$ обозначается алгебра линейных ограниченных операторов, отображающих E в себя.

Пусть $u_1;\ u_2;\ \ldots\ u_m$ — порождающий базис оператора $\overline{A}_1$, $\Phi(f;\ \lambda)=\{F_j(f;\ \lambda)\}_{j=1}^{m}$ — канонический образ вектора f в пространстве

$$L^2_\Sigma,\ \ \sum(\Delta)=\left\|\sum_{jk}(\Delta)\right\|_{j,\,k=1}^{m}=(E_1(\Delta)\,u_j,\ u_k),\ \ \rho(\Delta)=Sp\sum(\Delta),$$

$E_1(\Delta)$ — спектральная функция оператора $\overline{A_1}$, $E=E_m$ — евклидово пространство столбцов размерности m.

Теорема 1. *При сделанных предположениях оператор* $\hat{\overline{A}}_1=\overline{A_1\otimes I_2}$ *самосопряженный в* H. *Форма* $<\varphi\otimes\psi,\ \varphi\otimes\psi>$ *допускает интегральное представление*

$$<\varphi_1\otimes\psi_1,\ \varphi_2\otimes\psi_2>=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(\varphi_2;\ \lambda)\ S_{\psi_2^*,\,\psi_1}(\lambda)\,\Phi(\varphi_1;\ \lambda)\,d\rho(\lambda). \qquad (2)$$

Здесь $S(\lambda)$ *матрица-функция, задающая при каждом фиксированном* λ $\{S,\ E_m\}$ — *скалярное произведение на* Φ_2. *При фиксированных* $\psi_1,\ \psi_2\in\Phi_2$ *матрица-функция* $S_{\psi_2^*,\,\psi_1}(\lambda)$ ρ*-измерима.*

Доказательство. Доказательство самосопряженности оператора $\overline{A_1\otimes I_2}$, приведенное в [1], не зависело от предположений о кратности спектра оператора $\overline{A}_1$. Введем оператор $J_\psi\in[H_\mu;\ H]$, полагая $J_\psi\varphi=\varphi\otimes\psi$ и расширяя затем его по непрерывности. Каждой паре $\psi_1,\ \psi_2\in\Phi_2$ сопоставим оператор $J^*_{\psi_2}J_{\psi_1}\in[H_\mu]$. Если $E_1(\Delta)$ и $\hat{E}_1(\Delta)$ — спектральные функции операторов A_1 и $\hat{A}_1$, то

$$\hat{E}_1(\Delta)J_\psi=J_\psi E_1(\Delta)\ \text{ и }\ E_1(\Delta)\,J^*_{\psi_2}J_{\psi_1}=J^*_{\psi_2}J_{\psi_1}E_1(\Delta). \qquad (3)$$

Пусть $\Phi(f;\ \lambda)$ — канонический образ вектора f в пространстве L^2_Σ. Тогда, учитывая (3), имеем $\Phi\left(J^*_{\psi_2}J_{\psi_1}\varphi;\ \lambda\right)=Q_{\psi_2^*,\,\psi_1}\times$ $\times(\lambda)\,\Phi(\varphi;\ \lambda)$, где $Q_{\psi_2^*,\,\psi_1}(\lambda)$ — матрица-функция размеров $m\times m$,

$$Q_{\psi_2^*,\,\psi_1}(\lambda)=\left\|F_j\left(J^*_{\psi_2}J_{\psi_1}u_k;\ \lambda\right)\right\|_{j,\,k=1}^{m};\ \ <\varphi_1\otimes\psi_1,\ \varphi_2\otimes\psi_2>=$$

$$=\left(J^*_{\psi_2}J_{\psi_1}\varphi_1,\ \varphi_2\right)_\mu=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(\varphi_2;\ \lambda)\ Q_{\psi_2^*,\,\psi_1}(\lambda)\,\Phi(\varphi_1;\ \lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Матрица-функция $Q_{\psi_2^*,\,\psi_1(\lambda)}$ определена ρ почти всюду, причем множество, где она определена, зависит, вообще говоря, от ψ_1 и ψ_2. Положим

$$(\psi_1;\ \psi_2;\ \Delta):=\int\limits_{\Delta}Q_{\psi_2^*,\,\psi_1}(\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

и к семейству п. о. ядер $(\psi_1;\ \psi_2;\ \Delta)$ применим процедуру дифференцирования по Радону — Никодиму — Нельсону. Нам будет удобно применить ее в несколько модифицированной форме [см. 3]. Пусть

$$S_{\psi_2^*\psi_1}(\lambda) := \mathrm{R.\,N.\,N.} - \lim_{\Delta\to\lambda} \frac{(\psi_1;\ \psi_2;\ \Delta)}{\rho(\Delta)}. \tag{4}$$

Тогда

$$<\varphi_1 \otimes \psi_1,\ \varphi_2 \otimes \psi_2> = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(\varphi_2;\ \lambda)\ S_{\psi_2^*\psi_1}(\lambda)\, \Phi(\varphi_1;\ \lambda)\, d\rho(\lambda). \tag{5}$$

При фиксированных $\psi_1, \psi_2 \in \Phi_2$ матрица-функция $S_{\psi_2^*\psi_1}(\lambda)$ ρ-измерима, а при каждом фиксированном λ соответствие $(\psi_1;\ \psi_2;\ \lambda) \to S_{\psi_2^*\psi_1}(\lambda)$ обладает всеми свойствами $\boldsymbol{H}$-скалярного произведения.

2. Если на множестве Φ_2 задан алгебраически линейный оператор A_2 такой, что оператор $T_1 \otimes A_2$ эрмитов в H, и операторы $A_1 : \Phi_1 \to \Phi_1$ и $A_2 : \Phi_2 \to \Phi_2$ обладают направляющими отображениями*, то представление (5) допускает дальнейшую специализацию.

Пусть Φ_1, Φ_2 — линейные множества, на тензорном произведении которых $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ определена неотрицательная эрмитова билинейная форма $<\varphi_1 \otimes \psi_1,\ \varphi_2 \otimes \psi_2>$, удовлетворяющая приведенным выше условиям. Пусть оператор $A_1 : \Phi_1 \to \Phi_1$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и обладает направляющим отображением $\Phi(\varphi;\ \lambda) : \Phi_1 \to E_m$, и пусть оператор $A_2 : \Phi_2 \to \Phi_2$ такой, что: 1) оператор $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$ эрмитов в H; 2) оператор обладает направляющим отображением $\Theta(\cdot,\ \mu) : \Phi_2 \to E_n$.

Теорема 2. *При сделанных предположениях существуют:* 1) *неубывающая функция* $\rho(\lambda)$; 2) *матрица-функция* $P_{\lambda;\,\mu} : E_n \otimes E_m \to E_n \otimes E_m$ *при каждом фиксированном* μ, ρ-*измеримая по* λ, *а при каждом фиксированном* λ *неубывающая по* μ, *такие что справедливо равенство*

$$<\varphi_1 \otimes \psi_1,\ \varphi_2 \otimes \psi_2> = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\varphi_2;\ \lambda) \otimes \Theta(\psi_2;\ \mu)]^* P_\lambda(d\mu) \times \right.$$

$$\left. \times [\Phi(\varphi_1;\ \lambda) \otimes \Theta(\psi_1;\ \mu)] \right\} d\rho(\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. Укажем основные моменты. Образуем множество**, $E_m \otimes \Phi_2$, на котором вводим структуру скалярного произведения, полагая (λ — фиксировано)

$$<u \otimes \psi_1,\ v \otimes \psi_2>_\lambda = v^* S_{\psi_2^*\psi_1}(\lambda)\, u. \tag{7}$$

---

* Теория операторов с направляющими функционалами разработана в статьях [5—7]. Нам удобно применять ее в форме, приведенной в работе [8].

** Образование предгильбертова пространства $E_m \otimes \Phi_2$ со скалярным произведением, определяемым равенством $<u \otimes f,\ v \otimes g> = v^* S_{g^*f} u$, может явиться, по нашему мнению, необходимым приемом при изучении пространств с $\boldsymbol{H}$-скалярным произведением.

Гильбертово пространство, полученное при пополнении $E_m \otimes \Phi_2$ по метрике, порождаемой (7), обозначим H_λ. Оператор $A_2 : \Phi_2 \to \to \Phi_2$ индуцирует в H_λ оператор $A_{2,\lambda} = I_{E_m} \otimes A_2$. Покажем, что $A_{2,\lambda}$ эрмитов в каждом H_λ. Заметим, что эрмитовость $\hat{A}_2 = I_1 \otimes \otimes A_2$ эквивалентна равенству

$$J^*_{\varphi_2} J_{A_2 \psi_1} = J^*_{A_2 \psi_2} J_{\psi_1}. \tag{8}$$

Равенства (8) и (4) приводят к

$$S_{(A_2 \psi_2)^* \psi_1}(\lambda) = S_{\psi_2^* (A_2 \psi_1)}(\lambda), \tag{9}$$

а (7) и (9) означают эрмитовость $A_{2,\lambda}$ в H_λ. Непосредственно проверяется, что если $\Theta(\cdot, \mu)$ — направляющее отображение для оператора A_2, действующее в масштабное пространство E_n, то отображение $I \otimes \Theta(\cdot, \mu) : E_m \otimes \Phi_2 \to E_m \otimes E_n$ направляющее для $I \otimes A_2$. Записывая для $< u \otimes \psi_1, v \otimes \psi_2 >_\lambda$ интегральное представление, следующее из основной теоремы об операторах с направляющими функционалами [6] и вводя его в (5), приходим к (6).

3. Приведем операторные и аналитические «проекции» п. 1. Представление (6) и приведенные построения означают, по существу, что гильбертово пространство $\overline{\Phi_1 \otimes \Phi_2}$ реализуется в виде прямого интеграла гильбертовых пространств более простой структуры, а операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ представляются как прямые интегралы самосопряженных и эрмитовых операторов более простой структуры. Совершенно аналогично, как в статье [2], доказыватся

Теорема 3. *При условии теоремы 2 и условии вещественности оператора A_2 относительно некоторой инволюции, операторы $\hat{A}_1 = A_1 \otimes I_2$ и $A_2 = I_1 \otimes A_2$ могут быть расширены в H до самосопряженных операторов, коммутирующих между собой.*

Замечание. В отличие от ситуации, рассмотренной в работе [2], здесь условие вещественности A_2 в некоторой инволюции, видимо, существенно.

Теорема 4. *Непрерывная матрично-значная со значениями в $[E_m]$ эрмитово-положительная функция $F(x; y)$, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$ представима в виде*

$$F(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d \textstyle\sum_\lambda (\mu) \right\} d\rho(\lambda), \tag{10}$$

где $\sum_\lambda(\mu)$ — при каждом фиксированном λ матрично-значная со значениями в $[E_m]$ функция распределения, при каждом фиксированном μ элементы $\sum_\lambda(\mu)$ ρ-измеримые функции λ.

Теорема 5. *Пусть $F(x; y)$ $(-\infty < x < \infty,\ |y| \leqslant 2a)$ — матрично-значная непрерывная функция, четная по первому аргументу, и:*

1) *ядро*

$$K(x';\ x'';\ y';\ y'') = F(x' + x'';\ y' - y'') + F(x' - x'';\ y' - y'') \qquad (11)$$

положительно-определенное;

2) *справедлива оценка*

$$\| F(x;\ 0) \| \leqslant Ce^{Nx^2}. \qquad (12)$$

Тогда $F(x;\ y)$ *представима в виде*

$$F(x;\ y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\sum\nolimits_{\lambda}(\mu) \right\} d\rho(\lambda). \qquad (13)$$

Здесь $\rho(\lambda)$ — *неубывающая функция;* $\sum_{\lambda}(\mu)$ — *при каждом — матрично-значная функция распределения;* ρ — *измеримая при каждом фиксированном* μ.

Теорема 6. *Пусть* $F(x;\ y)\,(-\infty < x < \infty,\ |y| \leqslant 2a)$ — *матрично-значная непрерывная функция, четная по первому аргументу, и:*

1) *ядро*

$$K(x';\ x'';\ y';\ y'') = F(x' + x'';\ y' - y'') - F(x' - x'';\ y' - y'') \qquad (14)$$

положительно определенное;

2) *справедлива оценка*

$$\| F(x;\ 0) \| \leqslant Ce^{Nx^2}. \qquad (15)$$

Тогда $F(x;\ y)$ представима в виде

$$F(x;\ y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,\frac{x}{2}}{\lambda} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\sum\nolimits_{\mu}(\mu) \right\} d\rho(\lambda). \qquad (16)$$

Теоремы 4, 5, 6 доказываются единым способом. Строятся пространства функций от аргументов x и y, которые метризуются в каждом из своих случаев с помощью положительно определенного ядра $F(x' - x'';\ y' - y'')$ и ядер (11) и (14) соответственно. Операторы

$$\left\{ i\frac{d}{dx};\ i\frac{d}{dy} \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2};\ i\frac{d}{dy} \right\} \left\{ \frac{d^2}{dx^2};\ i\frac{d}{dy} \right\},$$

определенные на функциях, удовлетворяющих надлежащим краевым условиям [см. 6] играют роль операторов A_1 и A_2. В работе [6] установлен вид направляющих отображений для таких операторов. Определенность эрмитово-положительной функции в полосе в теореме 4 и наличие оценки (12), (15), в теоремах 5 и 6 обеспечивают выполнимость условий теоремы 2, после чего из представления (6) и вида направляющих отображений следуют представления (10) (13) (16). Детали доказательств мы опускаем. Теоремы 4 и 5 могут быть получены и другими способами и являются, по-видимому, известными*; теорема 6, возможно, является новой.

4. Специальные интегральные представления тригонометрических моментных последовательностей, установленные в [3], позволяют получить представления специальных классов аналитических функций двух комплексных переменных.

Определение 1. *Будем говорить, что аналитическая в единичном бикруге* $D_2 : \{|z| < 1, |w| < 1\}$ *функция* $F(z; w)$ *принадлежит классу* C_2 [см. 13], *если* $\operatorname{Re} F(z; w) \geqslant 0$.

Такие функции для случая n-переменных $n \geqslant 2$ изучались А. Кораньи и Л. Пукански [9], В. С. Владимировым и В. В. Дрожжиновым [10]. Ими было показано, что функции класса C_2 допускают интегральное представление

$$F(z; w) = C + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta_1} + z}{e^{i\theta_1} - z}\,\frac{e^{i\theta_2} + w}{e^{i\theta_2} - w}\, d\sigma(\theta_1; \theta_2), \tag{17}$$

где $\sigma(\theta_1; \theta_2)$ — мера на двумерном торе, принадлежащая классу $\mathrm{RP}(T_2)$ [см. 11], т. е. такая, что

$$\iint_{T_2} w_1^l w_2^m d\sigma(\theta_1; \theta_2) = 0; \tag{18}$$

$$w_1 = e^{i\theta_1};\ w_2 = e^{i\theta_2}\ lm < 0.$$

Опираясь на представление (17) в [9], была отмечена связь между функциями класса C_2 и двумерной тригонометрической проблемой моментов. Пусть

$$F(z; w) = \sum a_{nm} z^n w^m \quad (n, m) \in \boldsymbol{Z}^+ \times \boldsymbol{Z}^+ \tag{19}$$

Образуем последовательность

$$\hat{a}_{n,m} = \begin{cases} 2\operatorname{Re} a_{00} & n, m = 0; \\ a_{nm} & nm \geqslant 0,\ n + m > 0; \\ \bar{a}_{-n,-m} & nm \geqslant 0,\ n + m < 0; \\ 0 & \text{в остальных точках } Z \times Z. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда условия $F(z; w) \in C_2$ и $\hat{a}_{n'-n'',\, m'-m''} \gg 0$ эквивалентны.

Для последовательности $\hat{a}_{n,m}$ справедливо представление (30) из работы [3], которое мы запишем в виде

$$\hat{a}_{n,m} = \int_0^{2\pi} e^{-int} c(m; t)\, d\rho(t), \tag{21}$$

где $c(m; t)$ — каналовые функции [см. 2; 3] последовательности $\hat{a}_{n,m}$.

---

* Нам не известны работы, в которых они были бы явно сформулированы.

Выражая a_{nm} через $\hat{a}_{n,m}$ и вводя в (19) их выражения из (21), (20), получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Функции* $F(z;\ w)$ $(|z|<1,\ |w|<1)$ *класса* C_2, *представимы в виде*

$$F(z;\ w) = -\overline{F(0;\ 0)} + \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{1-ze^{-it}} \sum_{m\geqslant 0} c(m;\ t)\, w^m \right\} d\rho(t). \quad (22)$$

Здесь $\rho(t) = 2\pi\hat{\rho}(t)$, где $\hat{\rho}(t)$ — неубывающая функция, задающая представление Ф. Рисса — Г. Херглотца [см. 12] функции $F(z;\ 0)$;

$$F(z;\ 0) = i\mu + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\hat{\rho}(t); \quad (23)$$

$c(m;\ t)$ — последовательность функций, ρ-измеримых при каждом m, при ρ — почти всех t, последовательность $\ldots\ \overline{c_1(t)},\ 1,\ c_1(t),\ c_2(t),\ \ldots$ положительно-определенная и

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} c(m;\ t)\, d\rho(t) = 0,\ m>0,\ n<0. \quad (24)$$

Функции $c(m;\ t)$ удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(m;\ t)}{1-ze^{-it}}\, d\rho(t) = \varphi_m(z),\ |z|\leqslant 1,\ m\geqslant 1, \quad (25)$$

где $\varphi_m(z)$ взяты из разложения

$$F(z;\ w) = \sum_{m\geqslant 0} \varphi_m(z)\, w^m. \quad (36)$$

Отметим следствие из теоремы 7. Пусть $F(z;\ w) \in C_2$ и мера $\rho(t)$ в представлении Ф. Рисса — Г. Херглотца функции $F(z;\ 0)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} \ln \rho_c'(t)\, dt = -\infty. \quad (37)$$

Тогда $F(z;\ w) = F(z;\ 0)$.

Действительно, в этом случае в силу известного критерия полноты системы e^{int}, $n<0$ в L_ρ^2 получаем из (34), что $c(m;\ t) = 0$, $m>0$, а тогда $F(z;\ w) = F(z;\ 0)$.

Определение. *Последовательность* $\varphi_n(z)$, $n\geqslant 0$ *определенных в* D_1 *функций называется ПА-последовательностью, если: 1)* $\varphi_0(z)$ — *положительная гармоническая функция; 2) функции* $\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots$ *аналитические в* D_1; *3) для каждого фиксированного* $z_0 \in D_1$ *последовательность* $\ldots\ \overline{\varphi_2(z_0)},\ \overline{\varphi_1(z_0)},\ \varphi_0(z_0);\ \varphi_1(z_0),\ \varphi_2(z_0)\ \ldots$ *положительно-определенная.*

Предыдущие рассуждения показывают, что между ПА-последовательностями и классом функций C_2 существует взаимно-однозначное соответствие, задаваемое равенством (36). К этому же выводу приводит известная теорема К. Каратеодори [13]. Мы не касаемся здесь вопросов продолжения конечных ПА-последовательностей (с сохранением аналитичности функций $\varphi_n(z)$ при $n \geqslant 1$) и положительной определенности. Как показывает следствие из теоремы 7, здесь возможны отличные от точечного случая эффекты. Рассмотрение конечных ПА-последовательностей позволяет указать некоторые крайние точки в классе C_2 (теорема 10).

Рассмотрим случай $F(z;\ 0) = 1$. При этом $d\rho(t) = \frac{dt}{2\pi}$, и все становится особенно наглядным; $c(m;\ t)$ в представлении (32) суть граничные значения аналитических функций $\varphi_m(z)$, фигурирующих в разложении (36).

Естественно возникает вопрос, как описываются ПА-последовательности.

Теорема 8*. *Пусть* $\{\varphi_n(z)\}$, $\varphi_0(z) \equiv 1$ — *ПА-последовательность. Тогда существуют гильбертово пространство* H *и действующее в нем аналитическое сжатие* $T(z)$, *такие что*

$$\varphi_n(z) = (T^n(z)e,\ e),\ n \geqslant 0,\ e \in H,\ \|e\| = 1. \tag{38}$$

Вводя представление (38) в разложение (36), получаем теорему.

Теорема 9. *Функция* $F(z;\ w)\{|z| < 1,\ |w| < 1\}$ *класса* C_2 *такая, что* $F(z;\ 0) = 1$ *представима в виде*

$$F(z;\ w) = ([I - wT(z)]^{-1}e,\ e), \tag{39}$$

где $T(z)$ — *аналитическое сжатие, действующее в некотором гильбертовом пространстве* H, $e \in H$, $\|e\| = 1$.

Приведенная теорема позволяет строить разнообразные примеры функций класса C_2. В частности, беря $T(z)$ нульстепенными аналитическими сжатиями, приходим к квазиполиномам из C_2.

Ниже указываются некоторые крайние точки в классе C_2.

Теорема 10. *Пусть* $B(z)$ $(|z| < 1)$ — *внутренняя функция* [см. 14]. *Функция*

$$F(z;\ w) = \frac{1 + wB(z)}{1 - wB(z)} \tag{40}$$

— *крайняя точка в классе* C_2.

---

* К сожалению, объем статьи не позволяет привести доказательство этого предложения. Оно по своим методам лежит в стороне от приводимых здесь рассмотрений и будет помещено в другом месте. Для операторнозначных со значениями в $[H]$ ПА-последовательностей представление (38) заменяется на $\varphi_n(z) = \widetilde{P}_H T^n(z) \mid H$, $T(z)$ — аналитическое сжатие в $\widetilde{H} \supseteq H$, $\widetilde{P}_H$ — ортопроектор $\widetilde{H}$ на H.

Замечание. Как и можно было ожидать, в классе функций C_2 существуют крайние точки, не переводимые друг в друга аналитическими автоморфизмами биокруга.

Список литературы: **1.** *Овчаренко И. Е.* О разложении эрмитовых форм и симметрических операторов.— Функциональный анализ и его приложения, 1971, т. 5, с. 88—91. **2.** *Овчаренко И. Е.* О разложении эрмитовых форм и операторов. Получение специальных интегральных представлений положительно-определенных функций. I.— Мат. исследования, 1973, т. 8, вып. 2, с. 115—126. **3.** *Овчаренко И. Е.* О разложении эрмитовых форм и операторов. Получение специальных интегральных представлений положительно-определенных функций. II.— Мат. исследования, 1976, вып. 42, с. 152—170. **4.** *Nelson K.* Kernel functions and eigenfunctions expansions.— Duke Math. J., 1958, vol. 25. I, p. 15—27. **5.** *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно-определенных ядер на элементарные. — Докл. АН СССР, 1946, т. 53, с. 3—6. **6.** *Крейн М. Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами.— Сб. трудов ин-та мат. АН УССР, 1948, вып. 10, с. 83—106. **7.** *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m).— Укр. мат. журн., 1949, т. I, вып. 2, с. 3—66. **8.** *Zanger H. K.* Über die Methode der richtenden Funktionale von M. G. Krein.— Acta Mathem. Acad. Sci. Hung., 1970, vol. 21, Fasc 1-2, p. 207-224. **9.** *Koranyï A., Pukansky L.* Holomorphic functions with positive real parts in polycylinder.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, vol. 108; 3, p. 449-456. **10.** *Владимиров В. С., Дрожжинов В. В.* Голоморфные функции в поликруге с неотрицательной мнимой частью.— Мат. заметки, 1974, т. 15, вып. 1. с. 55—61. **11.** *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М., Мир, 1972. 158 с. **12.** *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961. 310 с. **13.** *Caratheodory C.* Über die Variabilitatsbereich der Fouriershen Konstanten von positive harmonishen Funktionen.— Rendiconti del Circolo de Palermo, 1911, vol. 32, S. 145-179. **14.** *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М., ИЛ, 1963. 308 с.

Поступила 30 ноября 1978 г.