УДК 517.535.4

Л. И. ИЛЬЕВСКИЙ

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию функционального уравнения

$$S(z)\,X^2(z) + T(z)Y^2(z) = R(z), \qquad (1)$$

в котором $X(z)$ и $Y(z)$ — неизвестные целые функции, а $S(z)$, $T(z)$ и $R(z)$ — данные целые функции.

Впервые уравнение вида (1) с $S(z) = R(z) = 1$ появилось в работе [1], где было показано, что к вопросу о разрешимости такого уравнения в определенном классе целых функций сводятся некоторые задачи теории дифференциальных уравнений.

В работе [2] была установлена связь между уравнением (1) и задачей построения ортогональных систем. Было построено решение рассматриваемого уравнения в случае, когда $S(z)$ и $T(z)$ — заданные многочлены, $R(z)$ — неизвестный многочлен заданной степени, а неизвестные целые функции $X(z)$ и $Y(z)$ удовлетворяют определенным условиям на бесконечности.

В § 6 статьи [3] уравнение (1) исследовалось в случае, когда $S(z) = R(z) = 1$, а $T(z)$ — данная функция класса $\boldsymbol{C}$ с простыми вещественными нулями, где $\boldsymbol{C}$ — класс вещественных целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^{+}|f(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

Было показано, что разрешимость такого уравнения в классе $\boldsymbol{C}$ эквивалентна существованию некоторого конформного отображения, и был найден общий вид решения.

В работе [4] уравнение (1) было рассмотрено при условии, что $S(z) = 1$, $T(z)$ и $R(z)$ — данные ненулевые многочлены, а $X(z)$

и $Y(z)$ — неизвестные целые функции. Были найдены необходимые и достаточные условия существования решения в классе целых функций и доказано существование решения с заданным поведением на бесконечности. Некоторые частные случаи этой задачи были рассмотрены в работе [5] в связи с задачами теории жидкостей (см. также [6]).

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1, 2, 3 (§ 1), обобщающие результаты, полученные в статье [4]. Эти теоремы дают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1) при произвольных S, T, R и общий вид решения. В § 2 мы рассмотрим случай, когда функции S, T, R вещественны и решение ищется в классе вещественных целых функций. § 3 посвящен исследованию роста решения. Результаты § 2 и теорема 11 (§ 3) являются обобщением теоремы, доказанной в работе [3].

§ 1. Решения в классе целых функций. Теорема 1. *Пусть* $S(z)$, $T(z)$, $R(z)$ — *целые функции, попарно не имеющие общих нулей. Для того, чтобы целые функции* $X(z)$, $Y(z)$ *давали решение уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы они имели вид*

$$X(z)=\sqrt{\frac{R(z)}{S(z)}}\cos\theta(z);\qquad Y(z)=\sqrt{\frac{R(z)}{T(z)}}\sin\theta(z),\tag{2}$$

где $\theta(z)$ — *многозначная функция, которая однозначна и аналитична в любой области* G, *получающейся из* C^1 *проведением разрезов от нулей функций* S, T, R *до* ∞, *обладающая свойствами:* (a1) *если* u_k — *нуль функции* ST, *то для некоторого целого* n_k *функция* $(S(z)\,T(z))^{-1/2}\,(\theta(z)-n_k\pi/2)$ *аналитична в точке* u_k, *причем если* $S(u_k)=0$, *то* n_k — *нечетное, а если* $T(u_k)=0$, *то* n_k — *четное;* (a2) *если* v_j — *нуль функции* R *кратности* m_j, *то для некоторого целого* t_j *такого, что* $|t_j|\leqslant m_j$ *и* $(t_j+m_j)/2$ — *целое, функция* $\theta(z)-\frac{1}{2}\,it_j\ln(z-v_j)$ *аналитична в точке* v_j.

Аналогичная теорема в случае, когда $S(z)=1$, а T и R — многочлены, была доказана в работе [4]. На общий случай доказательство переносится с несущественными изменениями.

Для любых наборов целых чисел $\{n_k\}$ и $\{t_j\}$ обозначим через $\Theta(\{n_k\},\ \{t_j\})$ класс функций $\theta(z)$, удовлетворяющих условиям, сформулированным в теореме 1.

Теорема 2. *Класс* $\Theta(\{n_k\},\ \{t_j\})$ *всегда непуст и состоит из тех и только тех функций* $\theta(z)$, *которые представимы в виде* $\theta(z)=\theta_0(z)+\sqrt{S(z)\,T(z)}\,g(z)$, *где* $\theta_0(z)$ — *какая-нибудь функция этого класса,* $g(z)$ — *произвольная целая функция.*

Доказательство. Обозначим через $P(z)$ целую функцию с простыми нулями в точках v_j и только в них. Мы покажем, что при надлежащем выборе целой функции $\varphi(z)$ классу $\Theta(\{n_k\},$ $\{t_j\})$ принадлежит функция вида

$$\theta(z)=\int\limits_a^z\sqrt{S(\xi)\,T(\xi)}\,(P(\xi))^{-1}\varphi(\xi)\,d\xi,\tag{3}$$

где a — некоторое комплексное число. Выберем число a так, чтобы никакие два нуля функции STR не лежали на одном луче с началом в a. Разрезы, образующие область G, проведем вдоль лучей, сонаправленных лучам $[a;\ u_k)$, $[a;\ v_j)$. Кривую интегрирования в (3) будем считать отрезком прямой.

Легко показать, что функция вида (3) удовлетворяет условиям (a1), (a2), если выполнены соотношения

$$\int_a^{u_k} \sqrt{S(z)\,T(z)}\,(P(z))^{-1}\varphi(z)dz = n_k\pi/2; \tag{4}$$

$$\operatorname{Res}_{v_j} \sqrt{ST}\,P^{-1}\varphi = it_j/2. \tag{5}$$

Действительно, из (4) следует, что

$$(S(z)\,T(z))^{-\frac{1}{2}}(\theta(z) - n_k\pi/2) = (S(z)\,T(z))^{-\frac{1}{2}}\int_{u_k}^{z} \sqrt{ST}\,P^{-1}\varphi d\xi.$$

Из этой формулы, раскладывая подынтегральное выражение по степеням $z - u_k$, получаем (a1). Для доказательства (a2) заметим, что функция

$$\theta(z) - \frac{1}{2}it_j\ln(z - v_j) = \int_a^z \Big(\sqrt{S(\xi)\,T(\xi)}\,(P(\xi))^{-1}\varphi(\xi) -$$

$$- \frac{1}{2}it_j(\xi - v_j)^{-1}\Big)d\xi$$

аналитична в v_j, так как в этой точке аналитично подынтегральное выражение, что, в свою очередь, следует из (5).

Существование целой функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условиям (4), (5), мы получим как следствие такой леммы, являющейся частным случаем одной теоремы Б. М. Макарова [8].

Лемма 1. *Пусть Φ — счетно-нормированное пространство с нормами $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|\cdot\|_n \leqslant \ldots$, Φ^* — сопряженное пространство, Φ_n^* — множество функционалов из Φ^*, непрерывных по норме $\|\cdot\|_n$. Пусть $\{L_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Phi^*$ — линейно независимая система, M — ее линейная оболочка. Предположим, что подпространство $M_n = M \cap \Phi_n^*$ конечномерно для любого n. Тогда для любой последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}^1$ существует элемент $\varphi \in \Phi$ такой, что $L_k(\varphi) = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$*

В работе [8] этот результат приведен без доказательства, поэтому мы приведем принадлежащее В. Э. Кацнельсону доказательство, которое он нам любезно предоставил.

Лемма будет доказана, если мы покажем, что для любой последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}^1$ разрешима система уравнений $\hat{L}_k(\varphi) = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\{\hat{L}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — какой-нибудь базис в пространстве M. Пусть $q = \min\{n \mid M_n \neq \{0\}\}$. Очевидно, что

$$M_q \subset M_{q+1} \subset M_{q+2} \subset \ldots, \bigcup_{n=q}^{\infty} M_n = M.$$

Выберем в M базис $\{\hat{L}_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что для любого n M_n является линейной оболочкой множества $\{\hat{L}_k\}_{k=1}^{p_n}$, где $\{p_n\}_{n=q}^{\infty}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел. Пусть $\sum\limits_{n=q}^{\infty} \varepsilon_n$ — сходящийся ряд с положительными членами. Мы построим последовательность $\{\psi_n\}_{n=q}^{\infty} \subset \Phi$ такую, что $\|\psi_{n+1}\|_n < \varepsilon_n$, $n = q$, $q+1, \ldots$ и элемент $\varphi_n = \sum\limits_{k=q}^{n} \Psi_k$ удовлетворяет соотношениям $\hat{L}_k(\varphi) = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, p_n$. Тем самым лемма будет доказана, так как последовательность $\{\varphi_n\}$ будет сходиться в Φ.

Искомую последовательность будем строить по индукции. Так как $\{\hat{L}_k\}$ — линейно независимая система, то существует элемент $\psi_q \in \Phi$ такой, что $\hat{L}_k(\psi_q) = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, p_q$. Предположим, что мы построили элементы $\psi_q, \psi_{q+1}, \ldots, \psi_n$ с нужными свойствами. Нам нужно найти $\psi_{n+1} \in \Phi$ такой, что $\hat{L}_k(\psi_{n+1}) = 0$, $k = q$,

$$q+1, \ldots, p_n;\ \hat{L}_k(\psi_{n+1}) = \mu_k - \hat{L}_k(\varphi_n),\ k = p_n + 1, \ldots, p_{n+1};$$
$$\|\psi_{n+1}\|_n < \varepsilon_n.$$

Если $p_{n+1} = p_n$, то положим $\psi_{n+1} = 0$. Пусть $p_{n+1} > p_n$. Обозначим

$$D = \{\psi \in \Phi \mid \hat{L}_k(\psi) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, p_n;\ \hat{L}_k(\psi) = \mu_k -$$
$$- \hat{L}_k(\varphi_n),\ k = p_n + 1, \ldots, p_{n+1}\},\ U = \{\psi \in \Phi \mid \|\psi\|_n < \varepsilon_n\}.$$

Мы хотим доказать, что $D \cap U \neq \varnothing$. Предположим противное: пусть $D \cap U = \varnothing$. Тогда по теореме Хана — Банаха существуют функционал $L \in \Phi^*$ и вещественное число K такие, что

$$\operatorname{Re} L(\psi) \geqslant K,\ \psi \in D\ \mathbf{(6)};\quad \operatorname{Re} L(\psi) < K,\ \psi \in U. \tag{7}$$

Так как система уравнений с конечным числом линейно независимых функционалов всегда разрешима (мы уже использовали этот факт для базы индукции), то из (6) следует, что L есть линейная комбинация $\hat{L}_1, \ldots, \hat{L}_{p_{n+1}}$, поэтому $L \in M$. Из (7) следует, что функционал L ограничен в U, поэтому $L \in \Phi_n^*$. Значит, $L \in M_n$, т. е. $L = \sum\limits_{k=1}^{p_n} \alpha_k \hat{L}_k$, откуда получаем, что для любого $\psi \in D$ $L(\psi) = 0$. Следовательно, $K \leqslant 0$. С другой стороны, так как $0 \in U$, то $K > 0$ — противоречие. Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем применять лемму 1, беря в качестве Φ пространство целых функций $\varphi(z)$ с нормами $\|\varphi\|_n = \max\limits_{|z| \leqslant n} |\varphi(z)|$. Любой линейный непрерывный функционал L на этом пространстве (т. е. аналитический функционал) можно представить в виде

$$L(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(z, L) \varphi(z)\, dz, \tag{8}$$

где $g(z, L)$ — функция, аналитическая вне некоторого компакта, $g(\infty, L) = 0$, Γ — замкнутый контур, охватывающий этот компакт, причем функция $g(z, L)$ определяется по функционалу L однозначно [9, с. 139]. Назовем носителем функционала L наименьший выпуклый компакт, в дополнение к которому аналитически продолжается функция $g(z, L)$.

Заметим, что функционал $L(\varphi) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \alpha(z)\, \varphi(z)\, dz$, где кривая интегрирования является отрезком, а функция $\alpha(z)$ аналитична в окрестности этого (открытого) отрезка, можно записать в виде (8) с $g(z, L) = \int\limits_{z_2}^{z_1} \frac{\alpha(\xi)\, d\xi}{z - \xi}$. Областью аналитичности этой функции является дополнение к отрезку $[z_1; z_2]$ (это следует из свойств интеграла типа Коши [10, с. 245]). Следовательно, в данном случае $\operatorname{supp} L = [z_1; z_2]$. Очевидно, что функционал вида $L(\varphi) = \varphi(z_0)$ допускает представление (8) с $g(z, L) = (z - z_0)^{-1}$, и в этом случае $\operatorname{supp} L = \{z_0\}$.

Разрешимость системы уравнений (4), (5) будет доказана, если мы покажем, что система функционалов

$$F_k(\varphi) = \int\limits_{a}^{u_k} \sqrt{S(z)\, T(z)}\, (P(z))^{-1} \varphi(z)\, dz, \quad H_j(\varphi) = \varphi(v_j)$$

удовлетворяет условиям леммы 1. Эта система линейно независима, так как функции g, соответствующие различным функционалам, имеют особенности в различных точках, ($g(z, F_k)$ имеет особенность в точке u_k, а $g(z, H_j)$ — в точке v_j). Нам нужно еще доказать, что для любого n $\dim M \cap \Phi_n^* < \infty$, где M — линейная оболочка множества $\{F_k\} \cup \{H_j\}$. Обозначим через B_n множество функционалов $L \in \Phi^*$ таких, что $\operatorname{supp} L \subset \{|z| \leqslant n\}$. Как мы покажем ниже, $\Phi_n^* \subset B_n$, откуда следует, что $M \cap \Phi_n^* \cap M \cap B_n$. Пространство $M \cap B_n$ конечномерно, так как оно представляет собой линейную оболочку конечного множества $(\{F_k\} \cup \{H_j\}) \cap B_n$, поэтому конечномерно и $M \cap \Phi_n^*$.

Докажем включение $\Phi_n^* \subset B_n$. Предположим, что оно неверно, т. е. существует функционал $L \in \Phi_n^*$ такой, что $\operatorname{supp} L \subset \{|z| \leqslant n\}$.

Тогда функция $g(z, L) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-1}$ не продолжается аналитически на область $\{|z| > n\}$. Следовательно, $\overline{\lim_{k\to\infty}} |c_k|^{1/k} = r > n$. Пусть $r_1 \in]n; r[$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_k(z) = r_1^{-k} z^k$. Из (8) следует, что $L(\varphi_k) = c_k r_1^{-k}$, поэтому $\overline{\lim_{k\to\infty}} |L(\varphi_k)|^{1/k} = r r_1^{-1} > 1$. С другой стороны, так как $\|\varphi_k\|_n \underset{k\to\infty}{\to} 0$ и $L \in \Phi_n^*$, то $L(\varphi_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что в доказательстве теоремы выбор области G и числа a не является существенным в том смысле, что для любой G и любого $a \in G$ существует функция вида (3), удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Из теорем 1 и 2 следует, что уравнение (1) разрешимо, если функции S, T, R попарно не имеют общих нулей. Естественно теперь рассмотреть общий случай. Мы будем считать, не ограничивая общности, что все три функции S, T, R одновременно в нуль не обращаются.

Очевидно, что уравнение (1) неразрешимо, если функции S и T имеют общий нуль. Уравнение также неразрешимо, если некоторое комплексное число является нулем функции R нечетной кратности m и нулем S или T кратности, не меньшей, чем $m+1$. Действительно, пусть b — нуль R кратности m и нуль S кратности, не меньшей, чем $m+1$, и предположим, что $X(z)$ и $Y(z)$ — решение уравнения (1) в классе целых функций. Тогда в точке b функция $Y(z)$ имеет нуль кратности не меньшей, чем $(m+1)/2$. Отсюда следует, что b является нулем R кратности не меньшей, чем $m+1$ — противоречие.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в доказательстве теоремы 2 работы [4], можно показать, что в остальных случаях существуют целые функции S_1, T_1, R_1, не имеющие попарно общих нулей, и целые функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ такие, что если X_1, Y_1 — целое решение уравнения

$$S_1(z) X_1^2(z) + T_1(z) Y_1^2(z) = R_1(z), \tag{9}$$

то пара функций

$$X(z) = \alpha(z) X_1(z), \quad Y(z) = \beta(z) Y_1(z) \tag{10}$$

дает решение уравнения (1), и наоборот, любое решение уравнения (1) имеет вид (10), где X_1, Y_1 — решение уравнения (9). Следовательно, для уравнения (1) справедлив такой критерий разрешимости.

Теорема 3. *Пусть функции S, T, R не обращаются одновременно в нуль. Для того, чтобы уравнение (1) было разрешимо в классе целых функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) функции S и T не имеют общих нулей; 2) не* *существует комплексного числа, являющегося нулем R нечетной кратности m и нулем ST кратности не меньшей, чем $m+1$.*

§ 2. Решения в классе вещественных целых функций. На протяжении этого параграфа мы будем предполагать, если не оговорено противнсе, что функции S, T, R вещественны, попарно не имеют общих нулей и удовлетворяют условиям: (б1) $S(0)>0$, $T(0)>0$, $R(0)>0$; (б2) для любого вещественного x $S(x)\geqslant 0$, $T(x)\geqslant 0 \Rightarrow R(x)\geqslant 0$; $S(x)\leqslant 0$, $T(x)\leqslant 0\Rightarrow R(x)\leqslant 0$. Условие (б2) необходимо для существования вещественного решения, а выполнения (б1) нетрудно добиться простым преобразованием уравнения (1), за исключением того случая, когда для любого вещественного x $S(x)T(x)\leqslant 0$ (этот случай будет рассмотрен отдельно).

Область G построим следующим образом. Пусть V — окрестность вещественной оси, не содержащая невещественных нулей функций S, T, R. Разрезы, соединяющие ∞ с вещественными нулями (если таковые имеются), проведем так, чтобы они лежали в области $V\cap\{\operatorname{Im} z<0\}$ и не пересекали мнимой оси. Остальные разрезы проведем так, чтобы они были попарно симметричны относительно вещественной оси и не пересекали ее.

Теорема 4. *Пусть X, Y — вещественное целое решение уравнения (1). Тогда соответствующий этому решению в силу теоремы 1 набор данных $\{n_k\}$, $\{t_i\}$ удовлетворяет условиям:* (в1) $u_p=\bar u_q\Rightarrow n_p=n_q$; (в2) $v_p=\bar v_q$, $\operatorname{Im} v_p\neq 0\Rightarrow t_p=-t_q$; (в3) $\operatorname{Im} v_p=0$, $S(v_p)\cdot T(v_p)>0\Rightarrow t_p=0$; (в4) *если u_p и u_q — соседние вещественные нули функции ST, $u_p<u_q$, причем $S(x)T(x)<0$, $u_p<x<u_q$, то* $n_q-n_p=\sum\limits_{u_p<v_j<u_q} t_j$.

Доказательство. Пусть $\theta(z)$ — функция, о которой говорится в теореме 1. Условие (б1) и формулы (2) дают нам, что при вещественных x, близких к 0, $\operatorname{Im}\cos\theta(x)=\operatorname{Im}\sin\theta(x)=0$, откуда следует, что $\operatorname{Im}\theta(x)=0$. Используя принцип симметрии, мы получим тождество $\theta(\bar z)=\overline{\theta(z)}$, $z\in G\setminus V$, из которого следует (в1), так как $n_k=\theta(u_k)$. Чтобы доказать (в2), заметим, что так как функция $g_p(z)=\theta(z)-\frac{1}{2}it_p\ln(z-v_p)$ аналитична в точке v_p, то в точке $\bar{v_p}$ будет аналитична функция $\overline{g_p(z)}=\theta(z)+\frac{1}{2}it_p\ln(z-\bar v_p)+C$ (постоянная C зависит от выбора ветви логарифма).

Докажем теперь (в3). В этом случае из (б2) следует, что $R(x)/S(x)>0$, $R(x)/T(x)>0$ при x, достаточно близких к v_p. Но тогда при этих значениях x $\operatorname{Im}\theta(x)=0$ и, следовательно, по принципу симметрии функция $\theta(z)$ однозначна в окрестности точки v_p, а это возможно лишь при $t_p=0$.

Перейдем к доказательству (в4). Обозначим нули функции R, содержащиеся в $]u_p;\ u_q[$, через $v_1<v_2<\ldots<v_l$. Из (3) следует, что на каждом из интервалов $]u_p;\ v_1[$, $]v_1;\ v_2[,\ldots,]v_l;\ u_q[$ величина $\operatorname{Re}\theta(x)$ постоянна. На первом из этих интервалов, очевидно,

$\operatorname{Re}\theta(x)=n_p\pi/2$, а на последнем $\operatorname{Re}\theta(x)=n_q\pi/2$. Условие (а2) (теорема 1) дает нам, что при переходе через точки $v_1, v_2, \ldots, v_l$ величина $\operatorname{Re}\theta(x)$ изменяется соответственно на $t_1\pi/2$, $t_2\pi/2, \ldots, t_l\pi/2$. Это и доказывает требуемое свойство.

Обозначим через $\Theta^*(\{n_k\}, \{t_j\})$ класс функций $\theta(z)\in\Theta(\{n_k\}, \{t_j\})$, которым соответствует вещественное решение уравнения (1).

Теорема 5. *Предположим, что наборы $\{n_k\}$ и $\{t_j\}$ удовлетворяют условиям (в1) — (в4), а также следующим двум условиям: 1) если $T(u_k)=0$, то n_k — четное, а если $S(u_k)=0$, то нечетное; 2) для любого j $|t_j|\leqslant m_j$ и $(t_j+m_j)/2$ — целое число, где m_j — кратность нуля функции R в точке v_j. Тогда класс $\Theta^*(\{n_k\}, \{t_j\})$ непуст и состоит из тех и только тех функций $\theta(z)$, которые представимы в виде $\theta(z)=\theta_0(z)+\sqrt{S(z)\,T(z)}\,g(z)$, где $\theta_0(z)$ — какая-нибудь функция этого класса, $g(z)$ — произвольная вещественная целая функция.*

Доказательство. По теореме 2 существует функция $\theta(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1 с данными наборами $\{n_k\}$ и $\{t_j\}$. Ее можно представить в виде (3), где $a=0$, а функция $\varphi(z)$ удовлетворяет соотношениям (4), (5). Положим $\bar\varphi(z)=\overline{\varphi(\bar z)}$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что функция $\bar\varphi(z)$ также удовлетворяет условиям (4), (5). Действительно, положим в таком случае $\bar\theta(z)=\int\limits_0^z\sqrt{S(\xi)\,T(\xi)}\,(P(\xi))^{-1}\bar\varphi(\xi)\,d\xi$, $\theta_1(z)=(\theta(z)+\bar\theta(z))/2$. Очевидно, что функция $\theta_1(z)$ будет удовлетворять условиям теоремы 1. Кроме того, при вещественных x, близких к 0, $\operatorname{Im}\theta_1(x)=0$. Отсюда следует, что функции $X(z)$ и $Y(z)$ вещественны.

Докажем выполнение (4) и (5) для функции $\bar\varphi(z)$. Рассмотрим сначала невещественные нули функций S, T, R. Пусть $\operatorname{Im}u_k\neq0$. Замечая, что $\sqrt{S(\bar z)\,T(\bar z)}=\overline{\sqrt{S(z)\,T(z)}}$ для любого $z\in G\setminus V$, с помощью (в1) получаем:

$$\int\limits_0^{u_k}\sqrt{ST}\;P^{-1}\bar\varphi dz=\overline{\int\limits_0^{\bar u_k}\sqrt{ST}\;P^{-1}\varphi dz}=n_k\pi/2$$

(кривые интегрирования мы считаем лежащими в $G\setminus V$). Пусть теперь $\operatorname{Im}v_j\neq0$. Тогда из (в2) следует:

$$\operatorname{Res}_{v_j}\sqrt{ST}\;P^{-1}\bar\varphi=\overline{\operatorname{Res}_{\bar v_j}\sqrt{ST}\;P^{-1}\varphi}=-\overline{\frac{1}{2}it_j}=\frac{1}{2}it_j.$$

Рассмотрим теперь вещественные нули. Пусть $\operatorname{Im}v_p=0$, $S(v_p)\,T(v_p)>0$. Благодаря (в3) имеем $t_p=0$. Это означает, что $\varphi(v_p)=0$ и, следовательно, $\bar\varphi(v_p)=0$, откуда вытекает (5) для функции $\bar\varphi(z)$ в точке v_p. В случае, когда $\operatorname{Im}v_p=0$, $S(v_p)\,T(v_p)<0$.

(5) для $\bar{\varphi}(z)$ мы получим, используя тождество $\overline{\sqrt{S(x)\,T(x)}} = -\sqrt{S(x)\,T(x)}$, справедливое для всех x, близких к v_p:

$$\operatorname{Res}_{v_p}\sqrt{ST}\;P^{-1}\bar{\varphi} = \overline{\operatorname{Res}_{v_p}\overline{\sqrt{ST}}\;P^{-1}\varphi} = -\overline{\frac{1}{2}\,it_p} = \frac{1}{2}\,it_p.$$

Пусть u_p — наименьший положительный нуль функции ST. Благодаря (в3) подынтегральное выражение в (3) аналитично на интервале $[0;\,u_p[$, поэтому требуемое условие можно получить так же, как и для невещественного нуля u_p. Аналогично рассматривается следующий нуль u_q функции ST, если u_p — нуль четной кратности. Предположим, что u_p — нуль нечетной кратности. Так как точки v_j являются для подынтегрального выражения в (3) простыми полюсами, то

$$\int\limits_{u_p}^{u_q}\sqrt{ST}\;P^{-1}\varphi dz + Vp\int\limits_{u_q}^{u_p}\sqrt{ST}\;P^{-1}\varphi dx = -\pi i\sum_{u_p<v_j<u_q}\operatorname{Res}_{v_j}\sqrt{ST}\,P^{-1}\varphi, \tag{11}$$

где в первом интеграле кривая интегрирования лежит в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Вследствие (в4) величина правой части равна $(n_q - n_p)\pi/2$. Такое же значение имеет, очевидно, и первое слагаемое в (11). Следовательно,

$$Vp\int\limits_{u_q}^{u_p}\sqrt{S(x)\,\mathrm{T}(x)}\,(P(x))^{-1}\varphi(x)\,dx = 0. \tag{12}$$

Так как $S(x)\,T(x) < 0$ для любого $x\in\,]u_p;\,u_q[$, то очевидно, что равенство (12) останется верным, если в нем φ заменить на $\bar{\varphi}$. Заменяя φ на $\bar{\varphi}$ в равенстве (11) и используя доказанное уже для $\bar{\varphi}$ свойство (5) и условие (в4), мы получим, что

$$\int\limits_{u_p}^{u_q}\sqrt{S(z)\,T(z)}\;(P(z))^{-1}\bar{\varphi}(z)\,dz = (n_q - n_p)\,\pi/2,$$

откуда следует истинность (4) для $\bar{\varphi}$ и точки u_q. Для всех остальных $u_k > 0$ доказательство легко провести по индукции, и аналогично для $u_k < 0$. Очевидно, что класс $\Theta^*(\{n_k\},\ \{t_j\})$ состоит из тех и только тех функций $\theta(z)\in\Theta(\{n_k\},\ \{t_j\})$, для которых $\operatorname{Im}\theta(x) = 0$ при x, близких к 0. Отсюда следует утверждение теоремы об общем виде функций класса $\Theta^*(\{n_k\},\ \{t_j\})$. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $S(x)\,T(x)\leqslant 0$ для любого вещественного x. Не уменьшая общности, можно считать, что $S(0) > 0$, $T(0) < 0$, $R(0) > 0$. Тогда, используя (2), имеем $\operatorname{Im}\cos\theta(0) = \operatorname{Re}\sin\theta(0) = 0$, откуда следует, что $\operatorname{Re}\theta(0)\equiv 0 (\operatorname{mod}\pi)$. Мы можем считать, что $\operatorname{Re}\theta(0) = 0$ (достаточно рассмотреть вместо $\theta(z)$ функцию $\theta(z) - n\pi$ с подходящим n, которой, с точностью до знака, соответствует то же самое решение).

Теорема 6. *При сформулированных выше предположениях наборы* $\{n_k\}$ *и* $\{t_j\}$, *соответствующие функции* $\theta(z)$, *удовлетворяют условиям: (г1)* $\operatorname{Im} u_p \neq 0$, $u_p = \bar{u}_q \Rightarrow n_p = -n_q$; *(г2)* $v_p = \bar{v}_q \Rightarrow t_p = t_q$; *(г3) если* u_p *и* u_q — *соседние вещественные нули функции* ST, $u_p < u_q$, *то*

$$n_q - n_p = \sum_{u_p < v_j < u_q} t_j.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4. Отличие состоит лишь в том, что при доказательстве свойств (г1) и (г2) нужно использовать тождество $\sqrt{S(\bar{z})\,T(\bar{z})} = -\overline{\sqrt{S(z)\,T(z)}}$.

Теорема 7. *В случае, когда* $S(x)\,T(x) \leqslant 0$ *для любого вещественного* x, *справедлива теорема 5, если в ее формулировке условия (в1) — (в4) заменены на (г1) — (г3).*

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 5, со следующим изменением: если функция ST имеет хотя бы один вещественный нуль u_k, то в качестве a нужно взять такое вещественное число, что $a < u_k$ и промежуток $[a;\ u_k[$ не содержит нулей функций S, T, R.

§ 3. Исследование роста решения. Мы будем считать известными определение и свойства характеристик Неванлинны $m(r, f)$, $N(r, f)$, $T(r, f)$, $m(r, a, f)$, $N(r, a, f)$, $T(r, a, f)$ мероморфной функции $f(z)$, понятие категории роста неубывающей функции $\alpha(r)$, $r > 0$, и понятие категории роста мероморфной функции [7, с. 23—27, 61—65].

Теорема 8. *Пусть* $X(z)$, $Y(z)$ — *решение уравнения (1),* $\theta(z)$ — *функция, соответствующая этому решению по теореме 1. Положим*

$$\mu(r, \theta) = \max_{0 < v < r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Im} \theta(ve^{it})|\, dt.$$

Тогда справедливы утверждения: 1. *Категории роста* $X(z)$ *и* $Y(z)$ *не превосходят максимальной из категорий* $S(z)$, $T(z)$, $R(z)$, $\mu(r, \theta)$. 2. *Категория роста* $\mu(r, \theta)$ *не превосходит максимальной из категорий* $X(z)$, $S(z)$, $R(z)$, *(или* $Y(z)$, $T(z)$, $R(z)$*).*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \cos 2\theta(z) = 2S(z)\, X^2(z)/R(z) - 1. \tag{13}$$

Очевидно, что категория $f(z)$ не превосходит максимальной из категорий X, S, R. Из соотношения

$$\ln^+ |\cos \theta| = |\operatorname{Im} \theta| + O(1) \tag{14}$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Im} \theta(re^{it})|\, dt = m(r, f) + O(1), \tag{15}$$

откуда следует утверждение п. 2.

Используя очевидное неравенство $N(r, f) \leqslant N(r, 0, R)$ и соотношение (15), мы получим, что категория $f(z)$ не превосходит максимальной из категорий $\mu(r, \theta)$ и $R(z)$. Тогда утверждение п. 1 легко получается из формул

$$X^2(z) = R(z)(1 + f(z))/2S(z), \ Y^2(z) = R(z)(1 - f(z))/2T(z), \quad (16)$$

вытекающих из (2). Теорема доказана.

Обозначим через $\boldsymbol{K}$ класс неотрицательных измеримых функций $h(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{1+x^2} dx < \infty.$$

Теорема 9. *Предположим, что* $|\ln|S(x)|| \in \boldsymbol{K}$, $|\ln|T(x)|| \in \boldsymbol{K}$, $|\ln|R(x)|| \in \boldsymbol{K}$. *Тогда условие* $\ln^+|X(x)| \in \boldsymbol{K}$, $\ln^+|Y(x)| \in \boldsymbol{K}$ *эквивалентно условию* $|\operatorname{Im}\theta(x)| \in \boldsymbol{K}$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из (14) и таких неравенств, легко получающихся из (13) и (16):

$$\ln^+|f(x)| \leqslant \ln^+|S(x)| + 2\ln^+|X(x)| + |\ln|R(x)|| + 2\ln 2;$$

$$2\ln^+|X(x)| \leqslant \ln^+|R(x)| + \ln^+|f(x)| + |\ln|S(x)|| + \ln 2;$$

$$2\ln^+|Y(x)| \leqslant \ln^+|R(x)| + \ln^+|f(x)| + |\ln|T(x)|| + \ln 2.$$

Заметим, что в случае, когда функции S, T, R, X, Y вещественны, теорема 8 сохранит силу, если в определении величины $\mu(r, \theta)$ интеграл по отрезку $[0; 2\pi]$ заменить интегралом по отрезку $[0; \pi]$. Используя это соображение, а также то, что $|\ln|h(x)|| \in \boldsymbol{K}$ для любой функции $h(z) \in \boldsymbol{C}$ [11, с. 315], из теорем 8 и 9 легко получить

Следствие. Пусть $S, T, R \in \boldsymbol{C}$. Для того чтобы $X, Y \in \boldsymbol{C}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_0^{\pi} |\operatorname{Im}\theta(re^{it})|\, dt = O(r), \ r \to \infty; \quad (16)$$

$$|\operatorname{Im}\theta(x)| \in \boldsymbol{K}. \quad (17)$$

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях последнее утверждение можно усилить в сторону достаточности.

Теорема 10. *Предположим, что S, T, R — функции класса $\boldsymbol{C}$ с вещественными нулями. Пусть X, Y — вещественное решение уравнения (1), $\theta(z)$ — функция, соответствующая этому решению по теореме 1. Для того, чтобы $X, Y \in \boldsymbol{C}$, достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int\limits_0^{\pi} (\operatorname{Im}\theta(re^{it}))^+ \sin t\, dt = O(r), \ r \to \infty; \quad (18)$$

$$(\operatorname{Im}\theta(x))^+ \in \boldsymbol{K}. \quad (19)$$

Мы остановимся лишь на основных этапах доказательства этой теоремы, так как полное доказательство довольно громоздко.

Очевидно, нам нужно показать, что из условий (18) и (19) следуют условия (16) и (17). Для всякой функции $h(z)$, мероморфной в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, мы будем обозначать через $S(r, h)$ характеристику Неванлинны для полуплоскости [7, с. 39]. Заметим, что если в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ функция $h(z)$ не имеет полюсов, то соотношение $S(r, h) = O(1)$ эквивалентно выполнению условий

$$\int_0^\pi \ln^+ |h(re^{it})| \sin t\, dt = O(r), \quad r \to \infty; \tag{20}$$

$$\ln^+ |h(x)| \in \boldsymbol{K}. \tag{21}$$

Нами будет использована

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, вещественная на вещественной оси. Предположим, что $N(r, f) = O(r)$, $S(r, f) = O(1)$, $r \to \infty$. Тогда $m(r, f) = O(r)$, $r \to \infty$.*

Доказать эту лемму можно с помощью теоремы 2.3 [7, с. 363] и леммы 2.1 [7, с. 360].

Рассмотрим функцию $g(z) = e^{-i\theta(z)}$, которая мероморфна во всех точках полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ за исключением нулей функций S, T, R. Если $S(x_0)\, T(x_0)\, R(x_0) = 0$, то в некоторой окрестности $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z - x_0| < \varepsilon\}$ справедливо представление $g(z) = g_0(\sqrt{z - x_0})$, где $g_0(\xi)$ — функция, мероморфная в точке $\xi = 0$ (это следует из теоремы 1). Поэтому [см. 7, с. 15] для функции $g(z)$ справедливы все результаты теории Неванлинны для полуплоскости. Так как $\ln|g(z)| = \operatorname{Im}\theta(z)$, то из (18) и (19) следует, что $S(r, g) = O(1)$. С помощью аналога первой основной теоремы Неванлинны для полуплоскости можно показать, что тогда $S(r, 1/g) = O(1)$ и, следовательно, $S(r, f) = O(1)$, где $f(z) = \cos 2\theta(z) = \frac{1}{2}(g(z) + 1/g(z))$. Отсюда с помощью (21) и (14) следует (17). Так как $N(r, f) \leqslant N(r, 0, R)$, то $N(r, f) = O(1)$, $r \to \infty$. Применяя к функции $f(z)$ лемму 2, и используя (14), мы получим (16). Тем самым доказательство будет закончено.

В заключение мы рассмотрим частный случай, в котором рост решения удается связать с геометрическими свойствами функции $\theta(z)$.

Теорема 11. *Предположим, что $R \equiv 1$, а S и T — функции класса $\boldsymbol{C}$ с простыми вещественными нулями, удовлетворяющие условию $S(0) > 0$, $T(0) > 0$. Пусть X, Y — целое решение уравнения (1), $\theta(z)$ — функция, соответствующая этому решению по теореме 1. Для того, чтобы $X, Y \in \boldsymbol{C}$, необходимо и достаточно чтобы одна из функций $\theta(z)$ и $-\theta(z)$ отображала полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ конформно на область вида*

$$\{\theta \mid p\pi/2 < \operatorname{Re}\theta < q\pi/2,\ \operatorname{Im}\theta > 0\} \setminus \bigcup_{p<k<q} \{\theta \mid \operatorname{Re}\theta = $$
$$= k\pi/2,\ 0 < \operatorname{Im}\theta \leqslant h_k\},$$

причем $\operatorname{Im}\theta(0)=0$, *где* p *и* q — *целые числа (возможно, что* $p=-\infty$, $q=\infty$), $0 \leqslant h_k < \infty$.

Доказательство. Утверждение теоремы в сторону достаточности легко получить, применив теорему 10 к функции $\theta(z)$ или к функции $-\theta(z)$, которой соответствует решение X, $-Y$ (вещественность решения очевидна благодаря условию $\operatorname{Im}\theta(0)=0$). Доказательство необходимости аналогично доказательству необходимости в теореме 6.1 работы [3].

Автор выражает глубокую признательность И. В. Островскому за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы: 1. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров λ-зон устойчивости. — ДАН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 767—770. 2. *Ахиезер Н. И.* Об одном неопределенном уравнении Чебышевского типа в задачах построения ортогональных систем. — Мат. физика и функциональный анализ/ФТИНТ АН УССР, 1971, вып. 2, с. 3—14. 3. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сб., 1975, т. 97 (139), № 4 (8), с. 540—606. 4. *Gross F., Osgood Ch. F., Yang Chung-Chun.* On the entire solutions of a functional equation in the theory of fluids. — J. Math. Phys., 1975, vol. 16, N 10, p. 2142—2147. 5. *Penrose O., Lebowitz J. L.* A functional equation in the theory of fluids. — J. Math. Phys., 1972, vol. 13, N 5, p. 604-607. 6. *Lebowitz J. L., Zomic D.* Mixtures of hard spheres with nonadditive diameters: some exact results and solution of PY equation. J. Chem. Phys., 1971, vol. 54, p. 3335-3354. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука. 1970. 592 с. 8. *Макаров Б. М.* О проблеме моментов в некоторых функциональных пространствах. — ДАН СССР, 1959, т. 127, № 5, с. 957—960. 9. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., Мир, 1968. 277 с. 10. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., Наука, 1968. 471 с. 11. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.

Поступила 4 декабря 1978 г.