УДК 513.838

В. Д. ГОЛОВИН, канд. физ.-мат. наук

О ПЕРЕХОДЕ К ПРОЕКТИВНОМУ ПРЕДЕЛУ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ КОГЕРЕНТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

В настоящей статье исследуются необходимые и достаточные условия, при которых топологическое векторное пространство гомологий (соответственно когомологий) когерентного аналитического пучка на комплексном пространстве канонически изоморфно проективному пределу пространств гомологий (соответственно когомологий) ограничений данного когерентного аналитического пучка на последовательность открытых множеств в данном комплексном пространстве.

§ 1. Формулировка основных результатов. Пусть X — комплексное пространство, счетное в бесконечности, и $\boldsymbol{F}$ — когерентный аналитический пучок на X. Векторное пространство когомологий $H^k(X; \boldsymbol{F})$ наделим обычной топологией (см., например, [1]). Пусть пространство X является объединением возрастающей последовательности открытых множеств:

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_p \subset \ldots; \quad \cup X_p = X.$$

Тогда топологические векторные пространства $H^k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ образуют проективную систему. Определено каноническое непрерывное линейное отображение

$$H^k(X; \boldsymbol{F}) \to \varprojlim H^k(X_p; \boldsymbol{F}) \tag{1.1}$$

и каноническое непрерывное линейное отображение отделимых пространств

$$\widetilde{H}^k(X; \boldsymbol{F}) \to \varprojlim \widetilde{H}^k(X_p; \boldsymbol{F}) \tag{1.2}$$

(тильда обозначает факторизацию по замыканию нуля).

Теорема 1. *Отображение* (1.2) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Следствие 1. Если пространства $H^k(X; \boldsymbol{F})$ и $H^k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы, то отображение (1.1) является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Следствие 2. Если пространство $H^k(X; \boldsymbol{F})$ отделимо, и $H^k(X_p; \boldsymbol{F}) = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то $H^k(X; \boldsymbol{F}) = 0$.

Отсюда непосредственно следует результат В. Виллани [2] (ср. [3]).

Теорема 2. *Пусть топологические векторные пространства $H^k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H^k(X; \boldsymbol{F})$ отделимо в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие: для каждого целого $p > 0$ и каждой окрестности нуля V в пространстве $H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F})$ существует такое целое $p' > p$, что образ $\operatorname{Im}\{H^{k-1}(X_{p'}; \boldsymbol{F}) \to H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F})\}$ содержится в сумме $V + \operatorname{Im}\{H^{k-1}(X; \boldsymbol{F}) \to H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F})\}$. В этом и только в этом случае отображение* (1.1) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Следствие 1. Пусть пространства $H^k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H^k(X; \boldsymbol{F})$ отделимо (и отображение (1.1) является изоморфизмом), если выполнено следующее условие: для каждого целого $p > 0$ образ отображения

$$H^{k-1}(X; \boldsymbol{F}) \to H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F})$$

всюду плотен в образе отображения

$$H^{k-1}(X_{p+1}; \boldsymbol{F}) \to H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F}).$$

Следствие 2. Если при каждом целом $p > 0$ пространство $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, и $H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) = 0$, то пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, и отображение (1.1) является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Частным случаем следствия 2 является следующее утверждение, используемое обычно в доказательстве теоремы (B) А. Картана (см., например, [4]): если $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F}) = 0$ и $H^{k-1}(X_p; \boldsymbol{F}) = 0$ при каждом целом $p > 0$, то $H^k(X;\ \boldsymbol{F}) = 0$ (ср. [2]).

Теорема 3. *Пусть пространства* $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ *отделимы, и пусть при каждом целом* $p > 0$ *образ пространства* $H^{k-1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ *всюду плотен в* $H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$. *Тогда пространство* $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ *отделимо и, следовательно, отображение* (1.1) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Следствие. Пусть при каждом целом $p > 0$ образ пространства $H^{k-1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ всюду плотен в $H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$, и $H^k(X_p;\ \boldsymbol{F}) = 0$. Тогда $H^k(X;\ \boldsymbol{F}) = 0$.

Отсюда непосредственно следуют результаты А. Силва [5, 6].

Пусть $\boldsymbol{M}$ — локально конечное покрытие пространства X компактными множествами. Тогда существует спектральная последовательность

$$E^2_{p,\,q} = H_p(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{H}^X_q(X;\ \boldsymbol{F})) \Rightarrow H_{p+q}(X;\ \boldsymbol{F}), \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{H}^X_q(X;\ \boldsymbol{F})$ — предкопучок $M \mapsto H^M_q(X;\ \boldsymbol{F})$ на категории замкнутых множеств в X (ср. [7]). Будем предполагать, что каждый элемент покрытия $\boldsymbol{M}$ обладает фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей. Тогда спектральная последовательность (1.3) вырождается. Получаем канонический изоморфизм векторных пространств

$$H_k(X;\ \boldsymbol{F}) = H_k(\boldsymbol{M};\ H^X_0(X;\ \boldsymbol{F})). \tag{1.4}$$

Векторное пространство цепей $C_k(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{H}^X_0(X;\ \boldsymbol{F}))$ наделим естественной топологией, превращающей его в пространство Фреше — Шварца. Тем самым, посредством изоморфизма (1.4) определим некоторую локально выпуклую топологию в векторном пространстве гомологий $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$.

Топологические векторные пространства $H_k(X_p; \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ образуют проективную систему. Определено каноническое непрерывное линейное отображение

$$H_k(X;\ \boldsymbol{F}) \to \varprojlim H_k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \tag{1.5}$$

и каноническое непрерывное линейное отображение отделимых пространств

$$\widetilde{H}_k(X;\ \boldsymbol{F}) \to \varprojlim \widetilde{H}_k(X_p;\ \boldsymbol{F}). \tag{1.6}$$

Теорема 4. *Отображение* (1.6) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Следствие. Если пространства $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ и $H_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы, то отображение (1.5) является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Теорема 5. *Пусть топологические векторные пространства $H_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H_k(X;\boldsymbol{F})$ отделимо в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие: для каждого целого $p>0$ и каждой окрестности нуля V в пространстве $H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ существует такое целое $p'>p$, что образ $\operatorname{Im}\{H_{k+1}(X_{p'};\ \boldsymbol{F})\to H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})\}$ содержится в сумме $V+\operatorname{Im}\{H_{k+1}(X;\ \boldsymbol{F})\to H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})\}$. В этом и только в этом случае отображение* (1.5) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Следствие. Пусть топологические векторные пространства $H_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо (и отображение (1.5) является изоморфизмом), если выполнено следующее условие: для каждого целого $p>0$ образ отображения $H_{k+1}(X;\ \boldsymbol{F})\to H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ всюду плотен в образе отображения $H_{k+1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})\to H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$.

Теорема 6. *Пусть пространства $H_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы, и пусть при каждом целом $p>0$ образ пространства $H_{k+1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ всюду плотен в $H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$. Тогда пространство $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо и, следовательно, отображение* (1.5) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Следствие. Если при каждом целом $p>0$ пространство $H_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ отделимо и $H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})=0$, то пространство $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо и отображение (1.5) является изоморфизмом топологических векторных пространств.

§ 2. Двойственные результаты. Пусть $\boldsymbol{U}$ — покрытие пространства X относительно компактными открытыми множествами. Тогда существует спектральная последовательность

$$E^2_{p,\,q}=H^c_p(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_q(\boldsymbol{F}))\Rightarrow H^c_{p+q}(X;\ \boldsymbol{F}),\tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{H}^c_q(\boldsymbol{F})$ — предкопучок $U\mapsto H^c_q(U;\ \boldsymbol{F})$ на категории открытых множеств в X (ср. [7]). Будем предполагать, что покрытие $\boldsymbol{U}$ состоит из голоморфно полных открытых множеств. Тогда спектральная последовательность (2.1) вырождается. Получаем канонический изоморфизм векторных пространств

$$H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})=H^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F})).\tag{2.2}$$

Векторное пространство цепей $C^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ наделим естественной топологией, превращающей его в сильное сопряженное к некоторому пространству Фреше — Шварца. Тем самым, посредством изоморфизма (2.2), определим некоторую локально выпуклую топологию в векторном пространстве гомологий $H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})$ (ср. [8]).

Топологические векторные пространства $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p=1,\ 2,\ \ldots)$ образуют индуктивную систему. Для локально выпуклого индуктивного предела этой системы определено каноническое непрерывное линейное отображение

$$\varinjlim H_k^c(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H_k^c(X;\ \boldsymbol{F}). \tag{2.3}$$

Теорема 7. *Отображение* (2.3) *является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Доказательство. При каждом $p = 1, 2, \ldots$ выберем счетное покрытие $\boldsymbol{U}_p$ открытого множества X_p голоморфно полными открытыми множествами. Будем считать, что $\boldsymbol{U}_p \subset \boldsymbol{U}_{p+1}$ при каждом p. Тогда для покрытия $\boldsymbol{U} = \cup \boldsymbol{U}_p$ пространства X пространство цепей $C_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше — Шварца. Кроме того, $\boldsymbol{C}_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ есть строгий локально выпуклый индуктивный предел пространств $C_k^c(\boldsymbol{U}_p;\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ $(p = 1, 2, \ldots)$. В силу изоморфизма (2.2) отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 8. *Пусть топологические векторные пространства* $H_k^c(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ *отделимы. Тогда пространство* $H_k^c(X;\boldsymbol{F})$ *отделимо в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие: для каждого целого* $p > 0$ *и каждого ограниченного множества* B *в* $H_k^c(X_p;\ \boldsymbol{F})$, *образ которого в пространстве* $H_k^c(X;\ \boldsymbol{F})$ *равен нулю, существует такое целое* $p' > p$, *что образ множества* B *в пространстве* $H_k^c(X_{p'};\ \boldsymbol{F})$ *равен нулю.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U}_p$ при каждом $p = 1, 2, \ldots$ — счетное покрытие множества X_p голоморфно полными открытыми множествами, причем $\boldsymbol{U}_p \subset \boldsymbol{U}_{p+1}$. Для $\boldsymbol{U} = \cup \boldsymbol{U}_p$ пространство цепей $C_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ канонически отождествимо со строгим локально выпуклым индуктивным пределом пространств $C_k^c(\boldsymbol{U}_p;\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ $(p = 1, 2, \ldots)$, и является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше — Шварца. Предположим, что условие теоремы выполнено. Покажем, что тогда пространство $H_k^c(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, т. е. что подпространство $\partial C_{k+1}^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ в $C_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ замкнуто. По теореме Банаха — Дьедонне [см. 9, с. 224] для этого достаточно, чтобы пересечение $B \cap \partial C_{k+1}^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ было замкнуто в $C_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ для каждого замкнутого ограниченного множества B в $C_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$. С другой стороны, при некотором целом положительном p множество B содержится в $C_k^c(\boldsymbol{U}_p;\boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$. Так как образ пересечения $B \cap \partial C_{k+1}^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ в пространстве $H_k^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ равен нулю, то по предположению теоремы существует такое целое $p' > p$, что образ пересечения $B \cap \partial C_{k+1}^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ в $H_k^c(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F}))$ равен нулю. Последнее означает, что

$$B \cap \partial C_{k+1}^c(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F})) \subset \partial C_{k+1}^c(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}_0^c(\boldsymbol{F})),$$

т. е. пересечение $B \cap \partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ совпадает с пересечением $B \cap \partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$. По предположению, пространство $H^c_k(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ отделимо, т. е. подпространство $\partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ замкнуто в $C^c_k(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$. Утверждение доказано. Покажем, что и обратно, условие теоремы выполнено, если пространство гомологий $H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо. Пусть B — ограниченное множество в $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$, образ которого в пространстве $H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})$ равен нулю. Можно считать, что задано ограниченное множество B в ядре отображения

$$\partial : C^c_k(\boldsymbol{U}_p;\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F})) \to C^c_{k-1}(\boldsymbol{U}_p;\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F})),$$

образ которого в пространстве $H^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ равен нулю. Последнее означает, что $B \subset \partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$. Так как пространство $H^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ отделимо, то подпространство $\partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ замкнуто в пространстве $C^c_k(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$. Следовательно, $\partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше — Шварца и потому канонически отождествимо с локально выпуклым индуктивным пределом пространств $\partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U}_p;\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$. Поэтому существует такое целое $p' > p$, что множество B содержится в $\partial C^c_{k+1}(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$. Это означает, что образ множества B в $H^c_k(\boldsymbol{U}_{p'};\ \boldsymbol{H}^c_0(\boldsymbol{F}))$ равен нулю. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть топологические векторные пространства $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, если выполнено следующее условие: для каждого целого $p > 0$ ядро отображения $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})$ содержится в ядре отображения $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_k(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$.

Следствие 2. Пусть пространства $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2, \ldots)$ отделимы, и пусть при каждом целом $p > 0$ каноническое отображение $H^c_k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_k(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ инъективно. Тогда пространство $H^c_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо.

§ 3. Двойственные результаты (продолжение). По известной теореме Урысона пространство X метризуемо. Выбрав какую-нибудь метрику, определяющую топологию пространства X, можно говорить о множествах, малых порядка $\varepsilon > 0$. При каждом $i = 1,\ 2,\ \ldots$ определим по индукции локально конечное покрытие $\boldsymbol{M}_i$ пространства X компактными множествами так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) покрытие $\boldsymbol{M}_i$ состоит из множеств, малых порядка $1/i$; 2) покрытие $\boldsymbol{M}_{i+1}$ вписано в покрытие $\boldsymbol{M}_i$; 3) для каждого множества $M \in \boldsymbol{M}_i$ вписанные в него множества из $\boldsymbol{M}_{i+1}$ покрывают M.

При каждом $i = 1, 2, \ldots$ определено инъективное отображение коцепных комплексов $C_c^k(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F}) \to C_c^k(\boldsymbol{M}_{i+1};\ \boldsymbol{F})$. Определим соответствующий локально выпуклый индуктивный предел

$$C_X^k(\boldsymbol{F}) = \varinjlim C_c^k(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F}).$$

Для произвольного открытого множества U в X обозначим через $C_U^k(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F})$ векторное подпространство в $C_c^k(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F})$, состоящее из коцепей, носители которых содержатся в U. Кограничный оператор комплекса $C_U^*(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F})$ индуцирован кограничным оператором комплекса $C_c^*(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F})$. Рассматривая отображения коцепных комплексов $C_U^k(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F}) \to C_U^k(\boldsymbol{M}_{i+1};\ \boldsymbol{F})$, определим локально выпуклый индуктивный предел $C_U^k(\boldsymbol{F}) = \varinjlim C_U^k(\boldsymbol{M}_i;\ \boldsymbol{F})$.

Существует спектральная последовательность

$$E_2^{p,\,q} = H^p C_U^*(\boldsymbol{H}^q(\boldsymbol{F})) \Rightarrow H_c^{p+q}(U;\ \boldsymbol{F}), \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{H}^q(\boldsymbol{F})$ — предпучок $M \mapsto H^q(M;\ \boldsymbol{F})$ на категории замкнутых множеств в X. Будем предполагать, что для любого покрытия $\boldsymbol{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ каждый его элемент обладает фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей. Тогда спектральная последовательность (3.1) вырождается. Получаем канонический изоморфизм топологических векторных пространств

$$H_c^k(U;\ \boldsymbol{F}) = H^k C_U^*(\boldsymbol{F}) \tag{3.2}$$

(ср. [10]).

Топологические векторные пространства $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ образуют индуктивную систему, и определено каноническое непрерывное линейное отображение

$$\varinjlim H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H_c^k(X;\ \boldsymbol{F}) \tag{3.3}$$

локально выпуклого индуктивного предела этой системы в пространство $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$.

Теорема 9. *Отображение (3.3) является изоморфизмом топологических векторных пространств.*

Доказательство. Для произвольного открытого множества U в X определенное выше пространство $C_U^k(\boldsymbol{F})$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше — Шварца. Кроме того, пространство $C_X^k(\boldsymbol{F})$ есть локально выпуклый индуктивный предел пространств $C_{X_p}^k(\boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$. В силу изоморфизма (3.2) получаем отсюда утверждение теоремы.

Теорема 10. *Пусть топологические векторные пространства $H^k(X_p,\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие: для каждого целого $p > 0$ и каждого ограниченного множества B в $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$, образ которого в пространстве*

$H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ равен нулю, существует такое целое $p' > p$, что образ множества B в пространстве $H_c^k(X_{p'};\ \boldsymbol{F})$ равен нулю.

Доказательство. Предположим, что условие теоремы выполнено. Покажем, что тогда пространство $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, т. е. что подпространство $\delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ в $C_X^k(\boldsymbol{F})$ замкнуто. По теореме Банаха—Дьедонне [9, с. 224] для этого достаточно, чтобы пересечение $B \cap \delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ было замкнуто в $C_X^k(\boldsymbol{F})$ для каждого замкнутого ограниченного множества B в $C_X^k(\boldsymbol{F})$. С другой стороны, при некотором целом $p > 0$ множество B содержится в $C_{X_p}^k(\boldsymbol{F})$. Так как образ пересечения $B \cap \delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ в пространстве $H^k C_X^*(\boldsymbol{F})$ равен нулю, то по предположению существует такое целое $p' > p$, что образ пересечения $B \cap \delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ в пространстве $H^k C_{X_{p'}}^*(\boldsymbol{F})$ равен нулю. Последнее означает, что $B \cap \delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F}) \subset \subset \delta C_{X_{p'}}^{k-1}(\boldsymbol{F})$, т. е. пересечение $B \cap \delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ совпадает с пересечением $B \cap \delta C_{X_{p'}}^{k-1}(\boldsymbol{F})$. По предположению пространство $H^k C_{X_{p'}}^*(\boldsymbol{F})$ отделимо, т. е. подпространство $\delta C_{X_{p'}}^{k-1}(\boldsymbol{F})$ замкнуто в $C_{X_{p'}}^k(\boldsymbol{F})$. Следовательно, пересечение $B \cap \delta C_{X_{p'}}^{k-1}(\boldsymbol{F})$ компактно в $C_{X_{p'}}^k(\boldsymbol{F})$, а потому замкнуто в $C_X^k(\boldsymbol{F})$. Утверждение доказано. Покажем, что и обратно, условие теоремы выполнено, если пространство $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо. Пусть B — ограниченное множество в $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$, образ которого в пространстве $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ равен нулю. Можно считать, что задано ограниченное множество B в ядре отображения $\delta: C_{X_p}^k(\boldsymbol{F}) \to C_{X_p}^{k+1}(\boldsymbol{F})$, образ которого в пространстве $H^k C_X^*(\boldsymbol{F})$ равен нулю. Последнее означает, что $B \subset \delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$. Так как пространство $H^k C_X^*(\boldsymbol{F})$ отделимо, то подпространство $\delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ замкнуто в $C_X^k(\boldsymbol{F})$. Следовательно, $\delta C_X^{k-1}(\boldsymbol{F})$ является сильным сопряженным к некоторому пространству Фреше — Шварца и потому канонически отождествимо с локально выпуклым индуктивным пределом пространств $\delta C_{X_p}^{k-1}(\boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$. Поэтому существует такое целое $p' > p$, что множество B содержится в пространстве $\delta C_{X_{p'}}^{k-1}(\boldsymbol{F})$. Это означает, что образ множества B в пространстве $H^k C_{X_{p'}}^*(\boldsymbol{F})$ равен нулю. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть топологические векторные пространства $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы. Тогда пространство $H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, если выполнено следующее условие: для каждого целого $p > 0$ ядро отображения $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H_c^k(X;\ \boldsymbol{F})$ содержится в ядре отображения $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H_c^k(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$.*

Следствие 2. *Пусть пространства $H_c^k(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы, и пусть при каждом целом $p > 0$ каноническое отобра-*

жение $H^k_c(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H^k_c(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ инъективно. Тогда пространство $H^k_c(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо.

§ 4. Доказательство основных результатов. Пусть U — произвольное открытое множество в X. Тогда по теореме двойственности [см. 8] имеет место канонический изоморфизм топологических векторных пространств

$$\{\widetilde{H}^k(U;\ \boldsymbol{F})\}' = \widetilde{H}^c_k(U;\ \boldsymbol{F}), \tag{4.1}$$

где сопряженное пространство наделено сильной топологией. Кроме того, $\widetilde{H}^k(U;\ \boldsymbol{F})$ — пространство Фреше — Шварца. Отсюда, ввиду теоремы 7, получаем доказательство теоремы 1.

Лемма 1. *Пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо тогда и только тогда, когда отделимо пространство $H^c_{k-1}(X;\ \boldsymbol{F})$.*

Доказательство. Пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо тогда и только тогда, когда кограничный оператор $\delta: C^{k-1}(U;\ \boldsymbol{F}) \to C^k(U;\ \boldsymbol{F})$ имеет замкнутый образ, т. е. является гомоморфизмом пространств Фреше — Шварца (считаем, что $k \geqslant 1$, так как при $k = 0$ утверждение тривиально). Это равносильно тому, что сопряженное отображение ${}^t\delta$, отождествимое с граничным оператором $\partial: C^c_k(U;\ \boldsymbol{F}) \to C^c_{k-1}(U;\ \boldsymbol{F})$, имеет замкнутый образ, т. е. равносильно отделимости пространства $H^c_{k-1}(U;\ \boldsymbol{F})$. Лемма доказана.

Докажем теорему 2. При сделанных предположениях пространства $H^c_{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1, 2, \ldots)$ отделимы по лемме 1. Кроме того, очевидно, что поляра множества $\mathrm{Im}\ \{H^{k-1}(X_{p'};\boldsymbol{F}) \to H^{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F})\}$ в пространстве $H^c_{k-1}X_p;\ \boldsymbol{F})$ совпадает с ядром

$$\mathrm{Ker}\,\{H^c_{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_{k-1}(X_{p'};\ \boldsymbol{F})\}.$$

Согласно теореме 8 условие теоремы 2 равносильно отделимости пространства $H^c_{k-1}(X;\ \boldsymbol{F})$. Тем самым теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. При сделанных предположениях пространства $H^c_{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы, а отображения $H^c_{k-1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H^c_{k-1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ инъективны. По следствию 2 из теоремы 8 пространство $H^c_{k-1}(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, а потому и пространство $H^k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо. Теорема доказана.

По теореме двойственности (ср. [8; 10]) для произвольного открытого множества U в X имеет место канонический изоморфизм топологических векторных пространств

$$\{\widetilde{H}^k_c(U;\ \boldsymbol{F})\}' = \widetilde{H}_k(U;\ \boldsymbol{F}), \tag{4.2}$$

где сопряженное пространство наделено сильной топологией. Кроме того, $\widetilde{H}_k(U;\ \boldsymbol{F})$ — пространство Фреше — Шварца. Отсюда, ввиду теоремы 9, получаем доказательство теоремы 4.

Лемма 2. *Пространство $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо тогда и только тогда, когда отделимо пространство $H^{k+1}_c(X;\ \boldsymbol{F})$.*

Доказательство. Пространство $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо тогда и только тогда, когда граничный оператор $\partial: C_{k+1}(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{H}_0^X(X;\ \boldsymbol{F})) \to C_k(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{H}_0^X(X;\ \boldsymbol{F}))$ имеет замкнутый образ, где $\boldsymbol{M}$ — локально конечное покрытие пространства X компактными множествами, каждое из которых обладает фундаментальной системой голоморфно полных открытых окрестностей, а $\boldsymbol{H}_0^X(X;\ \boldsymbol{F})$ — предкопучок $M \mapsto H_0^M(X;\ \boldsymbol{F})$ на категории замкнутых множеств в X (см. (1.4)). В этом и только в этом случае ∂ является гомоморфизмом пространств Фреше — Шварца. Это равносильно тому, что сопряженное отображение ${}^t\partial$, отождествимое с кограничным оператором $\delta: C_c^k(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F}) \to C_c^{k+1}(\boldsymbol{M};\ \boldsymbol{F})$, имеет замкнутый образ, т. е. равносильно отделимости пространства $H_c^{k+1}(X;\ \boldsymbol{F})$. Лемма доказана.

Докажем теорему 5. При сделанных предположениях, по лемме 2 пространства $H_c^{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы. Кроме того, очевидно, что поляра множества $\mathrm{Im}\{H_{k+1}(X_{p'};\ \boldsymbol{F}) \to H_{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})\}$ в $H_c^{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ совпадает с ядром $\mathrm{Ker}\{H_c^{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H_c^{k+1}(X_{p'},\ \boldsymbol{F})\}$. Согласно теореме 10 условие теоремы 5 равносильно отделимости пространства $H_c^{k+1}(X;\ \boldsymbol{F})$. Теорема 5 доказана.

Докажем теорему 6. При сделанных предположениях пространства $H_c^{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F})$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ отделимы, а отображения $H_c^{k+1}(X_p;\ \boldsymbol{F}) \to H_c^{k+1}(X_{p+1};\ \boldsymbol{F})$ инъективны. По следствию 2 из теоремы 10 пространство $H_c^{k+1}(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо, а потому и пространство $H_k(X;\ \boldsymbol{F})$ отделимо. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Головин В. Д.* Теоремы двойственности для когомологий комплексных многообразий.— Функциональный анализ и его приложения, 1970, т. 4, вып. 1, с. 33—41. 2. *Villani V.* Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi.— Atti della Accademia nazionale dei Lincei. Roma, 1967, vol. 43, fasc. 3-4, p. 168-170. 3. *Головин В. Д.* По поводу одной работы В. Виллани.— Укр. геометр. сб. Харьков, 1973, вып. 13, с. 63—66. 4. *Andreotti A., Vesentini E.* Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets.— Séminaire Ch. Ehresmann. Paris, 1962-1963, vol. 4, p. 1-31. 5. *Silva A.* Un teorema di passaggio al limite per la coomologia di uma varietà analitica complessa.— Atti della Accademia nazionale dei Lincei. Roma, 1974, vol. 56, fasc. 1, p. 43-44. 6. *Silva A.* Behnke-Stein theorem for analytic spaces.— Transactions of the American Mathematical Society, 1974, vol. 199, p. 317-326. 7. *Головин В. Д.* Гомологии аналитических пучков.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1, с. 41—43. 8. *Головин В. Д.* Двойственность де Рама-Серра для когерентных аналитических пучков на комплексных пространствах.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1976, вып. 25, с. 49—56. 9. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1959. 410 с. 10. *Головин В. Д.* Пространства когомологий с компактными носителями комплексных аналитических многообразий.— Укр. геометр. сб. Харьков, 1973, вып. 13, с. 27—63.

Поступила 5 января 1977 г.