УДК 517.535.4

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, Н. Е. КОРЕНКОВ

О ДЕФЕКТЕ В НУЛЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Здесь без пояснений используются стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений [1] и будет показано, что если f — целая функция вполне регулярного роста (в. р. р.) в смысле Б. Я. Левина — А. Пфлюгера [2] порядка ρ, $0<\rho\leqslant 1/2$, или f — целая функция нулевого порядка, последовательность нулей которой имеет конечную плотность, то $\delta(0, f'/f)=0$. Вероятно, равенство $\delta(0, f'/f)=0$ справедливо для всех целых функций порядка $\rho\leqslant 1/2$, но нам не удалось это доказать. Еще более широкое предположение высказал В. Фукс [3, с. 541]: если f — мероморфная функция порядка $\rho<1$, то $\delta(0, f'/f)=0$. Легко видеть, что в такой формулировке гипотеза В. Фукса неверна, так как если $\delta(a, f)>0$ при $a\neq 0, \infty$, то $\delta(0, f'/f)>0$. Действительно [1, с. 129], $m(r, a, f)\leqslant m(r, f/f')+O(\ln r)$, $r\to\infty$, а $T(r, f'/f)=\overline{N}(r, f)+\overline{N}(r, 1/f)+O(\ln r)\leqslant 2T(r, f)+O(\ln r)$, поэтому $\delta(0, f'/f)\geqslant\frac{1}{2}\delta(a, f)$. Для любого ρ, $0\leqslant\rho<1$ можно взять $f=1+1/g$, где g — целая функция порядка ρ. Тогда $\delta(0, f'/f)\geqslant\frac{1}{2}\delta(1, f)=1/2$. Неверна гипотеза В. Фукса и для целых функций порядка ρ, $1/2<\rho<1$. Действительно, пусть g — целая функция порядка ρ, $1/2<\rho<1$, с нулями в точках $k^{1/\rho}$, $k=1, 2, \ldots$. Тогда $\delta(0, g)>0$ и для $f=1+g$ выполняется $\delta(0, f'/f)\geqslant\frac{1}{2}\delta(1, f)=\frac{1}{2}\delta(0, g)$ (можно показать, что в этом случае $\delta(0, g)=1-\sin\pi\rho=\delta(0, f'/f)$).

Пусть f — целая функция порядка ρ, $0<\rho\leqslant 1/2$, в. р. р. относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r)\to\rho$ $(r\to\infty)$. Нами доказано, что существует такая система кружков $K=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{z:|z-z_j|<r_j\}$, $z_j\to\infty$, что $\sum\limits_{|z_j|<r} r_j^2=o(r^2)$, $r\to\infty$, и при $re^{i\varphi}\overline{\in}K$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $r\to\infty$ выполняется

$$\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|=\frac{\pi\rho A(\varphi)}{\sin\pi\rho}r^{\rho(r)-1}+o(r^{\rho(r)-1}) \tag{1}$$

равномерно относительно φ. Функция $A(\varphi)$ в (1) равна

$$A(\varphi)=\left|\int\limits_0^{2\pi}\exp\{i\rho(\varphi-\psi)+i\rho\pi\operatorname{sgn}(\psi-\varphi)\}\,d\Delta(\psi)\right|,$$

где $\Delta(\psi)$ — функция угловой плотности последовательности нулей f, причем, не уменьшая общности, считаем, что луч $\{z:\arg z=0\}$ является обыкновенным для нулей f [2, с. 125]. Лучи $\{z:\arg z=$

$=\psi_0\}$, где ψ_0 — точка разрыва $\Delta(\psi)$ включены в множество K, поэтому для всех $re^{i\varphi}\overline{\in} K$ выражение $A(\varphi)$ в правой части (1) имеет смысл.

Покажем, что при $0<\rho\leqslant 1/2$ выполняется $A(\varphi)>0$. Действительно,

$$A(\varphi)\geqslant\left|\operatorname{Re}\left\{\int_0^{\varphi}\exp\left[i\rho(\varphi-\psi-\pi)\right]d\Delta(\psi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\varphi}^{2\pi}\exp\left[i\rho(\varphi-\psi+\pi)\right]d\Delta(\psi)\right\}\right|=\int_0^{\varphi}\cos\{\rho(\varphi-\psi-\pi)\}\,d\Delta(\psi)+$$

$$+\int_{\varphi}^{2\pi}\cos\{\rho(\varphi-\psi+\pi)\}\,d\Delta(\psi)=B(\varphi)\geqslant 0,$$

причем, равенство $B(\varphi)=0$ возможно только в том случае, когда $\rho=1/2$, а $\Delta(\psi)=0$ при $0\leqslant\psi<\varphi_1$ и $\Delta(\psi)=\Delta>0$ при $\varphi_1\leqslant\psi\leqslant\leqslant 2\pi$. Но в этом последнем случае $A(\varphi)=\Delta>0$ для $\varphi\in[0,2\pi]\diagdown\{\varphi_1\}$. Таким образом, всегда $A(\varphi)>0$ для тех φ, для которых $A(\varphi)$ существует. Так как $B(\varphi)$ существует и непрерывна при всех $\varphi\in[0,2\pi]$, поскольку $\cos\{\rho(\varphi-\psi+\pi\operatorname{sgn}(\psi-\varphi))\}$ — непрерывная функция от $(\varphi,\psi)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, то $A(\varphi)\geqslant\omega>>0$ для всех φ, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, для которых $A(\varphi)$ существует. Из (1) следует, что при $z\overline{\in}K$ выполняется

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\geqslant\frac{\pi\rho\omega}{\sin\pi\rho}|z|^{\rho(|z|)-1}+o(|z|^{\rho(|z|)-1}),\quad z\to\infty.$$

Следовательно, при $z\overline{\in}K$

$$\ln^+\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|=O(\ln|z|),\quad z\to\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $E(r)$ множество $\{z:z\in K,|z|\leqslant r\}$; $\operatorname{mes}_2E(r)$ — плоская мера этого множества; E_r — множество $\{z:z\in K,|z|==r\}$; $\operatorname{mes}E_r$ — радианная мера E_r. Тогда $\operatorname{mes}_2E(r)=o(r^2)$, $r\to\infty$. Выберем число $q>1$ так, чтобы выполнялось

$$\ln 2>2\rho\ln q. \tag{3}$$

Так как $\int\limits_{q^n}^{q^{n+1}}(\operatorname{mes}E_r)\,rdr\leqslant\operatorname{mes}_2E(q^{n+1})=o(q^{2n})$, $n\to\infty$, то существуют такие числа r_n, $q^n\leqslant r_n<q^{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$, что $\varepsilon_n=\operatorname{mes}E_{r_n}\to 0$ при $n\to\infty$. Применяя известную теорему Фукса и Эдрея [1, с. 58], получаем оценку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{E_{r_n}}\ln^+\left|\frac{f(r_ne^{i\varphi})}{f'(r_ne^{i\varphi})}\right|d\varphi\leqslant C_1(q,\varepsilon_n)\,T\left(qr_n,\frac{f}{f'}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_1(q,\varepsilon_n)\,T(q^{n+2},f/f'), \tag{4}$$

где $C_1(q,\varepsilon_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Существует последовательность натуральных чисел $n_j\to\infty$ такая, что $T(q^{n_j+2},f/f')\leqslant 2T(q^{n_j},$

f/f'). Действительно, в противном случае для всех $n \geqslant n_0$ выполняется $T(q^{n+2}, f/f') > 2T(q^n, f/f')$, следовательно, $T(q^{n_0+2n}, f/f') > 2^n T(q^{n_0}, f/f')$ и

$$\rho \geqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r, f/f')}{\ln r} \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln 2 + \ln T\left(q^{n_0}, f/f'\right)}{(n_0+2n)\ln q} = \frac{\ln 2}{2\ln q},$$

что противоречит (3). Из (2) и (4) получаем, что

$$m\left(r_{n_j}, f/f'\right) \leqslant O\left(\ln r_{n_j}\right) + C_1\left(q, \varepsilon_{n_j}\right) T\left(q^{n_j+2}, f'/f\right) \leqslant$$
$$\leqslant O\left(\ln r_{n_j}\right) + 2C_1\left(q, \varepsilon_{n_j}\right) T\left(q^{n_j}, f'/f\right) \leqslant O\left(\ln r_{n_j}\right) +$$
$$+ 2C_1\left(q, \varepsilon_{n_j}\right) T\left(r_{n_j}, f'/f\right) = o\left(T\left(r_{n_j}, f'/f\right)\right),\ j\to\infty.$$

Следовательно, $\delta(0, f'/f) = 0$.

Пусть теперь f — целая функция нулевого порядка, причем $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, $0 < \Delta < \infty$, $\rho(r) \to 0$ при $r\to\infty$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок. В нашем доказательстве используется одна идея М. В. Келдыша [4]. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0$. Тогда

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z-a_k}, \quad a_k = |a_k|\, e^{i\alpha_k}.$$

Обозначим ($|z| = r$)

$$\Psi(z) = F(z) - \frac{n(r)}{z} = \sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{a_k}{z(z-a_k)} + \sum_{|a_k|>r} \frac{1}{z-a_k}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\varphi})|^{1/2}\, d\varphi \leqslant \frac{r^{-1/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{a_k}{re^{i\varphi}-a_k}\right|^{1/2} d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{|a_k|>r} \frac{1}{re^{i\varphi}-a_k}\right|^{1/2} d\varphi = r^{-1/2}\Phi_1(r) + \Phi_2(r). \qquad (5)$$

Запишем

$$\left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{a_k}{re^{i\varphi}-a_k}\right|^{1/2} = \left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{r\bar{a}_k}{r^2-\bar{a}_k re^{i\varphi}}\right|^{1/2} \leqslant r^{1/2}\left\{\left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{|a_k|\cos^+\alpha_k}{r^2-\bar{a}_k re^{i\varphi}}\right|^{1/2} +\right.$$
$$+ \left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{|a_k|(-\cos\alpha_k)^+}{r^2-\bar{a}_k re^{i\varphi}}\right|^{1/2} + \left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{|a_k|\sin^+\alpha_k}{r^2-\bar{a}_k re^{i\varphi}}\right|^{1/2} +$$
$$\left. + \left|\sum_{|a_k|\leqslant r} \frac{|a_k|(-\sin\alpha_k)^+}{r^2-\bar{a}_k re^{i\varphi}}\right|^{1/2}\right\}.$$

Так как при $|\zeta|<r$, $|a_k|\leqslant r$ выполняется $\operatorname{Re}(r^2-\bar{a}_k\zeta)^{-1}>0$,, то, применив известную лемму В. И. Смирнова [1, с. 327 лемма 6.1], получаем

$$r^{-1/2}\Phi_1(r)\leqslant\frac{r^{-1}}{\cos\frac{\pi}{4}}\left\{\left(\sum_{|a_k|\leqslant r}|a_k|\cos^+\alpha_k\right)^{1/2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{|a_k|\leqslant r}|a_k|(-\sin\alpha_k)^+\right)^{1/2}\right\}\leqslant\frac{4\sqrt{2}}{r}\left(\sum_{|a_k|\leqslant r}|a_k|\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{r}\left(\int\limits_0^r t\,dn(t)\right)^{1/2}=4\sqrt{2}\left(\frac{n(r)}{r}-r^{-2}\int\limits_0^r n(t)\,dt\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Аналогично, записав

$$\left|\sum_{|a_k|>r}\frac{1}{re^{i\varphi}-a_k}\right|^{1/2}=\left|\sum_{|a_k|>r}\frac{\bar{a}_k}{|a_k|^2-re^{i\varphi}\bar{a}_k}\right|^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{|a_k|>r}\frac{|a_k|\cos^+\alpha_k}{|a_k|^2-re^{i\varphi}\bar{a}_k}\right|^{1/2}+\ldots+\left|\sum_{|a_k|>r}\frac{|a_k|(-\sin\alpha_k)^+}{|a_k|^2-re^{i\varphi}\bar{a}_k}\right|^{1/2}$$

и учитывая, что $\operatorname{Re}(|a_k|^2-\zeta\bar{a}_k)^{-1}>0$ при $|\zeta|\leqslant r<|a_k|$, по лемме В. И. Смирнова получаем

$$\Phi_2(r)\leqslant4\sqrt{2}\left(\sum_{|a_k|>r}|a_k|^{-1}\right)^{1/2}=4\sqrt{2}\left(\int\limits_r^\infty t^{-1}dn(t)\right)^{1/2}=$$

$$=4\sqrt{2}\left(\int\limits_r^\infty t^{-2}n(t)\,dt-r^{-1}n(r)\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Из (5), (6), (7) и неравенства $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant2\sqrt{a+b}$, $a\geqslant0$, $b\geqslant\geqslant0$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\Psi(re^{i\varphi})|^{1/2}\,d\varphi\leqslant8\sqrt{2}\left(\int\limits_r^\infty\frac{n(t)}{t^2}\,dt-\frac{1}{r^2}\int\limits_0^r n(t)\,dt\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Так как

$$\int\limits_r^\infty t^{-2}n(t)\,dt\sim\Delta r^{\rho(r)-1};\quad\int\limits_0^r n(t)\,dt\sim\Delta r^{\rho(r)+1},\quad r\to\infty,$$

то из (8) получаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi}|\Psi(re^{i\varphi})|^{1/2}\,d\varphi=o\left(r^{(\rho(r)-1)/2}\right),\quad r\to\infty. \tag{9}$$

Обозначим через E_r множество тех значений $\varphi\in[0,\ 2\pi]$, для которых $|F(re^{i\varphi})|\leqslant n(r)/(2r)$. На E_r выполняется $|\Psi(re^{i\varphi})|\geqslant\geqslant n(r)/(2r)$. Следовательно, в силу (9)

$$\left(\frac{n(r)}{2r}\right)^{1/2}\operatorname{mes}E_r\leqslant\int\limits_{E_r}|\Psi(re^{i\varphi})|^{1/2}\,d\varphi=o\left(r^{(\rho(r)-1)/2}\right),\ r\to\infty,$$

и $\operatorname{mes} E_r \to 0$ при $r \to \infty$. Существует последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$ такая, что $T(2^{k_j+1}, f/f') \leqslant 2T(2^{k_j}, f/f')$ (в противном случае получили бы, что порядок f/f' не меньше 1). Пусть $r_j = 2^{k_j}$, $\varepsilon_j = \operatorname{mes} E_{r_j}$. Снова применяя использованную выше (см. (4)) теорему Фукса и Эдрея, получим

$$m\left(r_j, \frac{f}{f'}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_{r_j}} \ln^+\left|\frac{f(r_je^{i\varphi})}{f'(r_je^{i\varphi})}\right| d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,\,2\pi]\setminus E_{r_j}} \ln^+\left|\frac{f(r_je^{i\varphi})}{f'(r_je^{i\varphi})}\right| d\varphi \leqslant C_1(2, \varepsilon_j)\, T(2r_j, f/f') +$$

$$+ \ln^+\frac{2r_j}{n(r_j)} \leqslant 2C_1(2, \varepsilon_j)\, T(r_j, f/f') + O(\ln r_j), \quad j \to \infty,$$

откуда $\delta(0, f'/f) \leqslant 2C_1(2, \varepsilon_j)$ и $\delta(0, f'/f) = 0$.

В заключение отметим, что если для целой функции порядка $\rho = 0$ выполняется

$$\overline{N}(r + o(r), 0, f) = O(\overline{N}(r, 0, f)), \ r \to \infty, \tag{10}$$

то можно показать, что $\delta(0, f'/f) = 0$, не предполагая, что $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, $r \to \infty$. Действительно, так как $\overline{N}(r, 0, f) = N(r, f'/f) \leqslant T(r, f'/f) \leqslant N(r, f'/f) + O(\ln r)$, то из (10) следует, что

$$T(r + o(r), f'/f) = O(T(r, f'/f)), \quad r \to \infty. \tag{11}$$

Найдем уточненный порядок $\rho(r) \to 1$, $r \to \infty$, такой что

$$\Phi(r) = \int\limits_0^r n(t)\, dt \leqslant r^{\rho(r)} \quad (r \geqslant 2), \tag{12}$$

и на некоторой последовательности $r_j \to \infty$ в (12) имеет место равенство. Так как

$$\int\limits_r^\infty t^{-2} n(t)\, dt - r^{-2}\int\limits_0^r n(t)\, dt = 2\left\{\int\limits_r^\infty t^{-3}\Phi(t)\, dt - r^{-2}\Phi(r)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\int\limits_r^\infty t^{\rho(t)-3} dt - r^{-2}\Phi(r)\right\} = 2\left\{(1 + o(1))\, r^{\rho(r)-2} - r^{-2}\Phi(r)\right\}, \ r \to \infty,$$

то из (8) и неравенства $\Phi(r) \leqslant rn(r)$ следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |\Psi(r_je^{i\varphi})|^{1/2} d\varphi = o\left(r_j^{\rho(r_j)/2-1}\right) =$$

$$= o\left\{\left(\Phi(r_j)\, r_j^{-2}\right)^{1/2}\right\} = o\left\{(n(r_j)/r_j)^{1/2}\right\}, \quad j \to \infty. \tag{13}$$

Рассуждая, как выше, но используя вместо (9) соотношение (13), получим, что $\varepsilon_j = \operatorname{mes} E_{r_j} \to 0$, а затем, что $(q_j > 1)$

$$m(r_j, f/f') \leqslant C_1(q_j, \varepsilon_j)\, T(q_jr_j, f/f') + O(\ln r_j), \quad j \to \infty. \tag{14}$$

Но $C_1(q, \varepsilon) = \frac{6q}{q-1} \varepsilon \ln \frac{2\pi e}{\varepsilon}$ [1, с. 58]. Поэтому, если мы выберем $q_j = 1 + \{\varepsilon_j \ln (2\pi e/\varepsilon_j)\}^{1/2}$, то $q_j \to 1$ и $C_1(q_j, \varepsilon_j) \to 0$ при $j \to \infty$. В силу (11) $T(q_j r_j, f/f') = O(T(r_j, f/f'))$, $j \to \infty$. Тогда из (14) вытекает, что $m(r_j, f/f') = o(T(r_j, f/f'))$, $j \to \infty$, т. е. $\delta(0, f'/f) = 0$.

Список литературы: **1.** *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 592 с. **2.** *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956. 632 с. **3.** Entire functions and related parts of analysis. Problems.— Proc. Symp. Pure Math. / Amer. Math. Soc., 1968, vol. 11. **4.** *Келдыш М. В.* О рядах по рациональным дробям.— Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 3, с. 377—380.

Поступила 14 сентября 1978 г.