УДК 517.5

Н. А. ДЕРФЕЛЬ

О ПОКРЫТИЯХ КОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов. При проведении оценок в теории аналитических и субгармонических функций бывает полезным следующее утверждение.

Пусть множество $A \subset R^p$ покрыто евклидовыми шарами так, что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $B(x) = B(x, r(x))$ радиуса $r(x)$. Если $\sup\{r(x), x \in A\} < \infty$, то из системы шаров $\{B(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{B(x_k)\}$, покрывающую все множество A и имеющую кратность*, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства. При этом условие $\sup\{r(x), x \in A\} < \infty$ существенно в том случае, когда A является неограниченным множеством.

Для $p = 2$ это утверждение доказано Альфорсом, для $p \geqslant 2$ — Безиковичем [1] и независимо Ландкофом [2]. Морс [3] получил обобщение приведенного выше результата на случай, когда каждая точка x множества A покрывается открытым множеством $\omega(x)$, обладающим следующими свойствами: а) существуют такие евклидовы шары $B(x, r^*(x))$ и $B(x, r(x))$, что $B(x, r^*(x)) \subset \omega(x) \subset B(x, r(x))$ и для величины $\sigma(x) = r^*(x)/r(x)$ выполнено неравенство $\inf\{\sigma(x), x \in A\} > 0$; б) для каждого $z \in \omega(x)$ множество $\omega(x)$ содержит выпуклую оболочку множества $\{z\} \cup B(x, r^*(x))$.

В настоящей работе теорема Морса распространяется на тот случай, когда окрестности $\omega(x)$ не удовлетворяют, вообще говоря, условию «б», однако удовлетворяют некоторому условию другого характера.

---

* Кратностью системы множеств называется наибольшее число множеств системы, имеющих общую точку.

Теорема 1. *Пусть каждая точка x множества $A \subset R^p$ покрыта областью $\omega(x)$, удовлетворяющей условию: существуют евклидовы шары $B(x, r^*(x))$ и $B(x, r(x))$ такие, что*

$$\inf\{\sigma(x),\ x \in A\} > 2/(\sqrt{3}+1)\ (\sigma(x) = r^*(x)/r(x)). \tag{1}$$

Тогда, если $\sup\{r(x),\ x \in A\} < \infty$, то из покрытия $\{\omega(x),\ x \in A\}$ можно выделить не более чем счетное покрытие $\{\omega(x_k)\}$ множества A, кратность которого не превосходит некоторого числа, зависящего только от размерности пространства.

Отметим, что константа в правой части (1) не может, вообще говоря, быть заменена произвольным малым положительным числом. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество A и покрытие его $\{\omega(x),\ x \in A\}$, что $\sigma(x) > 1/2 - \varepsilon$, $x \in A$, и из покрытия $\{\omega(x),\ x \in A\}$ нельзя выделить подпокрытия множества A конечной кратности.*

§ 2. Доказательство теоремы 1. Нетрудно проверить, что достаточно рассматривать случай ограниченного множества A. Далее, легко показать, что

$$\min_{\substack{0 \leqslant q \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant q/2}} \max\left\{\frac{1}{q(1+t)},\ \frac{2}{\sqrt{4t+1}+1}\right\} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

Выберем положительное число ε так, чтобы $\inf\{\sigma(x),\ x \in A\} > 2(\sqrt{3}+1)+\varepsilon$. Для выбранного нами $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $0 < q_0 < 1$, $0 < t_0 < q_0/2$, что

$$\max\left\{\frac{1}{q_0(1+t_0)},\ \frac{2}{\sqrt{4t_0+1}+1}\right\} < 2/(\sqrt{3}+1)+\varepsilon. \tag{2}$$

Используем теперь способ построения требуемой системы, изложенный в работе [2].

Пусть $\sup\{r(x), x \in A\} = R_1$ (напомним, что $r(x)$ — радиус шара $B(x, r(x))$, введенного в формулировке теоремы 1). Выберем окрестность $\omega(x_1)$ так, чтобы выполнялось неравенство $r(x_1) > q_0 R_1$. Если $A_1 = A \setminus \omega(x_1) \neq \varnothing$, то, обозначив $R_2 = \sup\{r(x),\ x \in A_1\}$, выберем $x_2 \in A_1$ так, чтобы $r(x_2) > q_0 R_2$ и т. д. Этот процесс либо оборвется на некотором шаге, и тогда мы получим конечное покрытие множества A, либо окажется бесконечным и приведет к образованию бесконечной счетной системы $\{\omega(x_k),\ k = 1, 2, \ldots\}$ такой, что $x_k \in A_{k-1}$, $r(x_k) > q_0 R_k$, где $R_k = \sup\{r(x),\ x \in A_{k-1}\}$, $A_k = A \setminus \{\omega(x_1) \cup \ldots \cup \omega(x_k)\}$. Легко видеть, что система $\{\omega(x_k),\ k = 1, 2, \ldots\}$ является покрытием множества A и обладает следующим свойством: если $\omega(x_i)$ и $\omega(x_j)$ — две окрестности этой системы, то либо

I_1) только одна из окрестностей, например $\omega(x_i)$, расположена так, что точка x_i принадлежит окрестности $\omega(x_j)$, $i < j$, либо

I_2) $x_i \bar{\in} \omega(x_j)$, $x_j \bar{\in} \omega(x_i)$. Из способа построения системы $\{\omega(x_k),\ k = 1, 2, \ldots\}$ следует оценка

$$r(x_i)/r(x_j) > q_0. \tag{3}$$

Обозначим $\sigma_1 = 2/(\sqrt{3}+1)+\varepsilon$, $r'(x) = \sigma_1 r(x)$. Имеют место следующие простые соотношения: в случае I_1:

$$r(x_j) > |x_i - x_j| > r'(x_i) > q_0 \max\{r'(x_i),\ r'(x_j)\} \tag{4}$$

(это следует из того, что $x_i \in B(x_j,\ r(x_j))$, $x_j \overline{\in} B(x_i,\ r'(x_i))$); в случае I_2:

$$|x_i - x_j| > \max\{r'(x_i),\ r'(x_j)\} \tag{5}$$

(это следует из того, что $x_i \overline{\in} B(x_j,\ r'(x_j))$, $x_j \overline{\in} B(x_i,\ r'(x_i))$).

Рассмотрим евклидовы шары $b(x_k)$ с центрами в точках x_k радиусов $t_0 r'(x_k)$. Шары $b(x_k)$ попарно не пересекаются. Действительно, пусть $b(x_i) \cap b(x_j) \neq \varnothing$, тогда $|x_i - x_j| < 2t_0 \max\{r'(x_i),\ r'(x_j)\}$. Но поскольку $2t_0 < q_0$, то это неравенство противоречит неравенствам (4), (5), и, следовательно, $b(x_i) \cap b(x_j) = \varnothing$.

Пусть окрестности $\omega(x_i)$, $\omega(x_j)$ расположены по отношению друг к другу так, как это предусмотрено случаем I_1. Покажем, что для угла $\angle x_i y x_j$ справедливо неравенство $\angle x_i y x_j > C_1$, где C_1 — положительная константа, не зависящая ни от выбора окрестностей $\omega(x_i)$, $\omega(x_j)$, ни от выбора $y \in [\omega(x_i) \cap \omega(x_j)] \setminus [b(x_i) \cup b(x_j)]$.

Легко показать, что неравенство (2) эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} \sigma_1 q_0 (1 + t_0) > 1; \\ \sigma_1 (1 + \sigma_1 t_0) > 1, \end{cases} \tag{6}$$

и, следовательно, при достаточно малых положительных δ_1 и δ_2 имеют место неравенства

$$\sigma_1 q_0 (1 + t_0 - \delta_1) > 1; \tag{7}$$

$$\sigma_1 [1 + \sigma_1 (t_0 - \delta_2)] > 1. \tag{8}$$

Для упрощения записи будем считать $i = 1$, $j = 2$ и обозначим $r(x_i) = r_1$, $r(x_j) = r_2$, $|x_i - x_j| = c$. Из неравенств (3), (4), учитывая (7), (8), получим

$$r_2 - c < r_1/q_0 - r_1' = [1/(\sigma_1 q_0) - 1]\, r_1' < (t_0 - \delta_1)\, r_1'; \tag{9}$$

$$r_1 - c < r_1 - r_1' = (1/\sigma_1 - 1)\, r_1' < (1/\sigma_1 - 1)\, r_2 < (t_0 - \delta_2)\, r_2'. \tag{10}$$

Из неравенств (9), (10) следует, что $\partial b(x_1) \cap \partial B(x_2,\ r_2) \neq \varnothing$ и $\partial b(x_2) \cap \partial B(x_1,\ r_1) \neq \varnothing$.

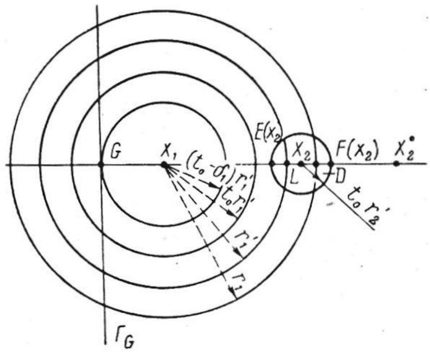
Для проведения дальнейших рассуждений нам необходимы следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $\omega(x_1)$ и $\omega(x_2)$ — окрестности, расположенные так, как это предусмотрено случаем I_1. Пусть далее $N(x_1,\ x_2)$ — множество точек $x \in B(x_1,\ r_1) \cap B(x_2,\ r_2)$, из которых отрезок $[x_1,\ x_2]$ виден под нулевым углом. Тогда $N(x_1,\ x_2) \subset B(x_1,\ (t_0 - \delta_1)\, r_1') \cup B(x_2,\ (t_0 - \delta_2)\, r_2')$.*

Доказательство. Легко видеть, что $N(x_1,\ x_2) = \{x : x = x_2 + \lambda (x_1 - x_2)/c;\ c < \lambda < r_2\} \cup \{x : x = x_1 + \mu (x_2 - x_1)/c,\ c < \mu <$

$< r_1\}$. Из неравенств (9), (10) следуют соотношения $|x_2 + \lambda(x_1 - x_2)/c - x_1| = |\lambda - c| = \lambda - c < r_2 - c < (t_0 - \delta_1) r_1'$; $|x_1 + \mu(x_2 - x_1)/c - x_2| = |\mu - c| = \mu - c < r_1 - c < (t_0 - \delta_2) r_2'$, из которых вытекает утверждение леммы.

Заметим, что в случае I_1 возможны две ситуации: I_{11}) $x_2 \in B(x_1, r_1) \setminus B(x_1, r_1')$; I_{12}) $x_2 \overline{\in} B(x_1, r_1)$. Все дальнейшие рассуждения будем вести для случая I_{11}, случай I_{12} рассматривается аналогично.



Введем обозначения, необходимые для формулировки леммы 2. Пусть $\omega(x_1)$ — произвольная фиксированная окрестность и x_2^0 — любая точка, лежащая вне шара $B(x_1, r_1)$. Обозначим точки пересечения сфер $\partial B(x_1, r_1')$ и $\partial B(x_1, r_1)$ с прямой $x_1 x_2^0$, лежащие на отрезке $[x_1, x_0^2]$, соответственно через L и D; точку пересечения сферы $\partial B(x_1, (t_0 - \delta_1) r_1')$ с прямой $x_1 x_2^0$, не принадлежащую отрезку $[x_1, x_2^0]$, обозначим через G (см. рисунок).

Пусть $\omega(x_2)$ — произвольная окрестность с центром x_2 на луче $\{x_1, x_2^0\}$, исходящем из точки x_1, расположенная по отношению к окрестности $\omega(x_1)$ так, как это предусмотрено случаем I_{11}. Тогда $x_2 \in [L, D]$.

Лемма 2. *В замыкании множества* $\Lambda = \cup \{[B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)] \setminus [b(x_1) \cup b(x_2)],\ x_2 \in [L, D]\}$ *нет точек, из которых виден под нулевым углом отрезок* $[x_1, L]$.

Доказательство. Пусть Γ_G — касательная гиперплоскость к шару $B(x_1, (t_0 - \delta_1) r_1')$ в точке G. Эта гиперплоскость разбивает все пространство на две части Γ_G^+ и Γ_G^-, которые, соответственно, содержат и не содержат точку x_1. Обозначим

$$\overline{\Gamma_G^+ \cap B(x_1, r_1)} = \widetilde{\Gamma}_G^+.$$

Из леммы 1 следует, что

$$\Lambda = [B(x_1, r_1) \setminus b(x_1)] \cap \left\{ \bigcup_{x_2 \in [L, D]} [B(x_2, r_2) \setminus b(x_2)] \right\} \subset$$

$$\subset \widetilde{\Gamma}_G^+ \setminus \left\{ b(x_1) \cup \left[\bigcap_{x_2 \in [L, D]} b(x_2) \right] \right\}.$$

Тогда

$$\overline{\Lambda} \subset \widetilde{\Gamma}_G^+ \setminus \left\{ b(x_1) \cup \operatorname{int} \left[\bigcap_{x_2 \in [L, D]} b(x_2) \right] \right\}. \tag{11}$$

Для любой точки $x_2 \in [L, D]$ обозначим через $E(x_2)$, $F(x_2)$ точки пересечения сферы $\partial b(x_2)$ с прямой $x_1 x_2^0 \cdot (E(x_2) \in [x_1, D]$, $F(x_2) \in \{x_1, x_2^0\} \setminus [x_1, L])$ (см. рисунок). Обозначим расстояние между точками P, Q через $\rho(P, Q)$.

Из леммы 1 и неравенства $r_1' + t_0 r_2' > (1 + t_0\sigma_1) r_1' = (1 + t_0\sigma_1) \times \times \sigma_1 r_1 > r_1 > c$, полученного на основании (4), (6), следует, что $E(x_2) \in [x_1, L]$, $F(x_2) \in \{x_1, x_2^0\} \setminus [x_1, D]$. Из неравенств (4), (10) получаем оценки

$$\rho(L, E(x_2)) = t_0 r_2' - (c - r_1') > t_0 r_2' + r_1' - r_2' > [1 + (t_0 - 1)/q_0]\, r_1'; \tag{12}$$

$$\rho(D, F(x_2)) = t_0 r_2' - (r_1 - c) > \delta_2 r_2' > \delta_2 \sigma_1 r_1', \tag{13}$$

справедливые при всех $x_2 \in [L, D]$. Пусть E, F — точки пересечения множества $\partial\{\cap\{b(x_2),\ x_2 \in [L, D]\}\}$ с прямой $x_1 x_2^0 (E \in [x_1, D]$, $F \in \{x_1, x_2^0\} \setminus [x_1, L]$. Тогда из неравенств (12), (13) следует, что $\rho(L, E) \geqslant [1 + (t_0 - 1)/q_0]\, r_1'$, $\rho(D, F) \geqslant \delta_2 \sigma_1 r_1'$, а значит,

$$\operatorname{int}\{\cap\{b(x_2),\ x_2 \in [L, D]\}\} \supset [L, D]. \tag{14}$$

Отсюда, учитывая (11) и то, что $[x_1, G] \subset b(x_1)$, а $\cup\{N(x_1, x_2),\ x_2 \in [L, D]\} = [x_1, G] \cup [L, D]$, получим утверждение леммы.

Рассмотрим теперь функцию $f(y) = \angle x_1 y L$, определенную на замыкании множества $\Lambda(x_1, x_2) = [B[x_1, r_1] \cap B(x_2, r_2)] \setminus [b(x_1) \cup \cup b(x_2)]$. Функция $f(y)$ непрерывна всюду, за исключением точек $y = L$ и $y = x_1$. Из включения (14) следует, что функция $f(y)$ непрерывна на множестве $\overline{\Lambda(x_1, x_2)}$. Кроме того, из леммы 2 вытекает, что $f(y) \neq 0$, $y \in \overline{\Lambda(x_1, x_2)}$. Следовательно, функция $f(y)$ ограничена снизу некоторым $C_1 > 0$. Учитывая, что для всех $x_2 \in [L, D]$ $\angle x_1 y x_2 > \angle x_1 y L$, $y \in \Lambda(x_1, x_2)$, получим $\angle x_1 y x_2 > > C_1 > 0$; $x_2 \in [L, D]$; $y \in \Lambda(x_1, x_2)$. В силу симметрии евклидового шара эта оценка сохраняется при любом выборе x_2^0, т. е. для всех x_2 из $B(x_1, r_1) \setminus B(x_1, r_1')$. Константа C_1 не зависит также от выбора окрестности $\omega(x_1)$ ввиду очевидной инвариантности оценки угла $\angle x_1 y x_2$ относительно преобразования подобия.

В случае I_2 также существует оценка снизу угла $\angle x_i y x_j$, $y \in [\omega(x_i, r_i) \cap \omega(x_j, r_j)] \setminus [b(x_i) \cup b(x_j)]$ положительной константой C_2, не зависящей от выбора окрестностей $\omega(x_i)$, $\omega(x_j)$. Доказательство этого факта аналогично рассмотренному выше доказательству в случае I_1, поэтому оно здесь не приводится.

Пусть теперь $y \in A$. Рассмотрим любое конечное число окрестностей $\omega(x_{k(i)})$, $i = 1, \ldots, N$, содержащих точку y. Если существует такой номер i', $1 \leqslant i' \leqslant N$, что $y \in b(x_{k(i')})$ (номер i' единственный, поскольку шары $b(x_{k(i)})$ попарно не пересекаются), то мы исключим окрестность $\omega(x_{k(i')})$ из наших рассмотрений. Тогда к любой паре окрестностей $\omega(x_{k(i)}$, $\omega(x_{k(j)})$ применима полученная выше оценка угла: $\angle x_{k(i)} y x_{k(j)} > \min\{C_1, C_2\}$. Но максимальное число m таких отрезков $[y, x_k]$, исходящих из точки y, определяется только размерностью рассматриваемого пространства [см. 2]. Следовательно, $N \leqslant m(p, \|:\|) + 1$. Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим множество A' в комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$, образованное точками $\{z_k, k = 1, 2, \ldots\}$ и $\{\zeta_n, n = 1, 2, \ldots\}$ вида $z_k = 2^{-k}$, $\zeta_n = 2^{-n^3} \cdot i$, k, $n = 1, 2, \ldots$ Зададим последовательность индексов $k(n) = n(n+1)/2$, k, $n = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим следующее покрытие $\{\omega(x), x \in A'\}$ множества A':

$$\omega(\zeta_n) = B(\zeta_n, p_n); \ \omega(z_k) = B(z_k, r_k) \cup B(\zeta_n, p_n) \cup [\bigcup_{x \in [z_k, \zeta_n]} B(x, \varepsilon_{kn})]; \quad k(n-1) < k \leqslant k(n), \ n = 1, 2, \ldots,$$

где $r_k = 2^{-k-1}$, $p_n = [2^{-n^3} - 2^{-(n+1)^3}]/2$, $0 < \varepsilon_{kn} < \min(r_k, p_n)$. Вычислим для этого покрытия величину $\sigma(x)$, фигурирующую в теореме 1. Для произвольного фиксированного n и $k(n-1) < k \leqslant k(n)$ имеем:

$$\sigma(z_k) = r_k / [p_n + \sqrt{|z_k|^2 + |\zeta_n|^2}] = [2(p_n 2^k + \sqrt{1 + |\zeta_n|^2 2^{2k}})]^{-1}.$$

Функция $\sigma(z_k)$ монотонно убывает по k, следовательно,

$$\sigma(z_k) \geqslant \sigma(z_{k(n)}), \quad k(n-1) < k \leqslant k(n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Легко показать, что

$$\sigma(z_{k(n)}) = r_{k(n)} / [p_n + \sqrt{|z_{k(n)}|^2 + |\zeta_n|^2}] \underset{n \to \infty}{\to} 1/2. \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) вытекает, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\sigma(z_k) > 1/2 - \varepsilon, \quad k \geqslant k_\varepsilon \geqslant 1. \tag{17}$$

Выберем теперь такой номер $n_\varepsilon \geqslant 1$, чтобы выполнялось неравенство $k(n_\varepsilon - 1) < k \leqslant k(n_\varepsilon)$, и рассмотрим множество A, образованное точками $\{z_k, k = k_\varepsilon, k_\varepsilon + 1, \ldots\}$ и $\{\zeta_n, n = n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \ldots\}$. В качестве покрытия множества A возьмем систему $\{\omega(x), x \in A\}$. Из неравенства (17) и равенств $\sigma(\zeta_n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ следует, что $\sigma(x) > 1/2 - \varepsilon$, $x \in A$.

Нетрудно видеть, что числа r_k, p_n, ε_{kn} выбраны нами так, что все шары $B(z_k, r_k)$, $B(\zeta_n, p_n)$, k, $n = 1, 2, \ldots$ попарно не пересекаются и выполнены соотношения

$$\left[\bigcup_{x \in [z_k, \zeta_n]} B(x, \varepsilon_{kn})\right] \cap [X \setminus B(z_k, r_k)] = \varnothing;$$

$$\left[\bigcup_{x \in [z_k, \zeta_n]} B(x, \varepsilon_{kn})\right] \cap [Y \setminus B(\zeta_n, p_n)] = \varnothing,$$

$k(n-1) < k \leqslant k(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $X = \{\lambda \in \boldsymbol{C}, \ \operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda \geqslant 0\}$, $Y = \{\lambda \in \boldsymbol{C}, \ \operatorname{Re} \lambda = 0, \ \lambda \geqslant 0\}$. Следовательно, каждую точку z_k можно покрыть только окрестностью $\omega(z_k)$, но при этом каждая точка ζ_n покрывается минимум $k(n) - k(n-1) = n$ раз. Поэтому из покрытия $\{\omega(x),\ x \in A\}$ нельзя выделить подпокрытия множества A конечной кратности. Теорема доказана.

Автор глубоко признателен Л. И. Ронкину за пcстановку задачи и руководство работой.

Список литературы: 1. *Besicovitch A. S.* A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions.— Proc. Cambridge Philos Soc., 1945, vol. 41, p. 103-110. 2. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М., Наука, 1966. 515 с. 3. *Morse A. P.* Perfect blankets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 61, p. 418-442.

Поступила 12 июня 1978 г.