УДК 517.51

М. Ф. БУРЛЯЙ, А. И. СОКОЛЕНКО

О ГРАНИЦАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ СУММИРОВАНИИ ДВОЙНОГО ЧИСЛОВОГО РЯДА РЕГУЛЯРНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

1. Пусть дан двойной числовой ряд $\sum_{m,\ n=0}^{\infty} a_{mn}$ **(1)** с комплексными членами. Обозначим через $S_{mn}=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}$ его частные суммы, и пусть $A=\|a_{mn\mu\nu}\|$ — четырехмерная матрица, удовлетворяющая условиям $a_{mn\mu\nu}=0$ при $\mu>m$ или $\nu>n$, или $\mu,\ \nu>m,\ n$. Такая матрица называется треугольной. Если двойная последовательность $\{t_{mn}\}$, определяемая преобразованием

$$t_{mn}=\sum_{\mu,\ \nu=0}^{m,\ n} a_{mn\mu\nu}S_{\mu\nu} \quad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

сходится, то ряд (1) называется A-суммируемым или суммируемым методом $A=\|a_{mn\mu\nu}\|$. Например, метод Чезаро суммирования двойных рядов определяется матрицей A с элементами

$$a_{mn\mu\nu}=A_{m-\mu}^{\alpha-1}A_{n-\nu}^{\beta-1}/A_m^{\alpha}A_n^{\beta};\quad A_m^{\alpha}=\binom{m+\alpha}{m}.$$

Преобразование (2) будем называть регулярным, если оно заменяет последовательность $\{S_{mn}\}$, сходящуюся к числу S в смысле Прингсхейма, на последовательность $\{t_{mn}\}$, сходящуюся в том же смысле к тому же числу S.

Рассмотрим класс треугольных регулярных положительных матриц $A=\|a_{mn\mu\nu}\|$, удовлетворяющих условию $a_{mn\mu\nu}=O(1/mn)$ **(3)**, равномерно относительно μ и ν ($\mu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Примерами таких матриц могут служить матрицы средних Чезаро любого порядка $\alpha\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1$. Действительно, если $\alpha\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1$, то

$$a_{mn\mu\nu}=\frac{A_{m-\mu}^{\alpha-1}A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_m^{\alpha}A_n^{\beta}}=$$

$$=\frac{m!\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-\mu-1)\,n!\,(\beta+1)\ldots(\beta+n-\nu-1)}{(m-\mu)!\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)\,(n-\nu)!\,(\beta+1)\ldots(\beta+n)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\alpha+m}\,\frac{\beta}{\beta+n}=O\left(\frac{1}{mn}\right).$$

Известно, что метод Чезаро суммирования двойных рядов на классе ограниченных последовательностей регулярен. В дальнейшем будем рассматривать только ограниченные двойные последовательности $\{S_{mn}\}$.

2. Результаты Н. А. Давыдова [1] обобщаются на класс треугольных регулярных положительных матриц $A = \| a_{mn\mu\nu} \|$, удовлетворяющих условию (3).

Пусть G — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости, G_ε — замкнутая выпуклая, ε-окрестность множества G.

Назовем замкнутое выпуклое множество G, отличное от бесконечно удаленной точки, (t)-множеством двойной последовательности комплексных чисел $\{S_{mn}\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k;\ n_k,\ n'_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ такая, что $S_{mn} \in G_\varepsilon$ для $(m, n) \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $\lim\limits_{k\to\infty} m'_k/m_k = \lim\limits_{k\to\infty} n'_k/n_k = \infty$, m_k, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, **(4)**, если (t)-множеством последовательности $\{S_{mn}\}$ является точка, то ее будем называть (t)-точкой этой последовательности.

Обозначим через E_1 множество всех частичных пределов ограниченной последовательности $\{S_{mn}\}$.

Лемма 1. *Если члены ряда (1) удовлетворяют условию* $a_{mn} = o\left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)$ **(5)**, *то каждая точка множества* E_1 *является* (t)-*точкой последовательности* $\{S_{mn}\}$.

Доказательство. Пусть точка $a \in E_1$ является частичным пределом последовательности $\{S_{mn}\}$. Тогда найдется подпоследовательность $\{S_{m_k n_k}\}$, сходящаяся к a. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Можем считать, что все $S_{m_k n_k} \in K_{\frac{\varepsilon}{2}} \left(|z - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Пусть $S_{m_k n'_k}$ — первая после $S_{m_k n_k}$ сумма в строке m_k, для которой $|S_{m_k n'_k} - a| > \varepsilon$. Если такая сумма существует для каждого k, то $S_{m_k n} \in K_\varepsilon (|z - a| \leqslant \varepsilon)$ для $n_k \leqslant n \leqslant n'_k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Из условия (5) следует, что $|a_{mn}| \leqslant \frac{|\varepsilon_{mn}|}{(m^2+n^2)}$, где $\varepsilon_{mn} \to 0$ при m, $n \to$. Обозначим через $\varepsilon'_k = \max\limits_{n_k+1 \leqslant n \leqslant n'_k} |\varepsilon_{m_k n}|$. Тогда $\frac{\varepsilon}{2} < |S_{m_k n'_k} -$

$$- S_{m_k n_k}| \leqslant \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{j=n_k+1}^{n'_k} \frac{\varepsilon_k}{i^2+j^2} \leqslant \varepsilon'_k \left(\sum_{j=n_k+1}^{n'_k} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=n_k+1}^{n'_k} \int_0^{m_k} \frac{dx}{x^2+j^2} \right) = \varepsilon'_k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=n_k+1}^{n'_k} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=n_k+1}^{n'_k} \frac{1}{j} \operatorname{arctg} \frac{m_k}{j} \right) \leqslant \frac{\pi}{2} \varepsilon'_k \ln \frac{n'_k}{n_k} + o(1).$$ Отсюда для достаточно больших k $\frac{n'_k - 1}{n_k} > e^{\frac{\varepsilon}{\pi \varepsilon'_k}}$. Так как $\varepsilon'_k \to 0$ $(k \to \infty)$, то $(n'_k - 1)/n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ **(6)**. Если же для некоторого k сумма

$S_{m_kn'_k}$, для которой $|S_{m_kn'_k}-a|>\varepsilon$ не существует, т. е. $|S_{m_kn'_k}-a|\leqslant\varepsilon$ для $n_k\leqslant n_k<\infty$, то за $S_{m_kn'_k}$ возьмем любую сумму, для которой $(n'_k-1)/n_k>k$. Следовательно, $(n'_k-1)/n_k\to\infty$ $(k\to\infty)$. Обозначим через $S_{m'_kn_k}$ первую после $S_{m_kn_k}$ частную сумму в столбце n_k, для которой $|S_{m'_kn_k}-a|>\varepsilon$, так что $S_{mn_k}\in K_\varepsilon\,(|z-a|\leqslant\varepsilon)$ для $m_k\leqslant m\leqslant m'_k-1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Как и при доказательстве (6) можно показать, что $(m'_k-1)/m_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ **(7)**.

Возможны два случая.

1) Существует подпоследовательность прямоугольников $\Delta_{k_\nu}\{m_{k_\nu},\ m'_{k_\nu}-1;\ n_{k_\nu},\ n'_{k_\nu}-1\}$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$ такая, что для $(m,\ n)\in\Delta_{k_\nu}$ имеет место $S_{mn}\in K_\varepsilon\,(|z-a|\leqslant\varepsilon)$. Из (6), (7) следует, что точка a является (t)-точкой последовательности $\{S_{mn}\}$.

2) Для каждого Δ_{k_ν} $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$ существует точка $(m^*_{k_\nu},\ n^*_{k_\nu})\in\Delta_{k_\nu}$ такая, что $\left|S_{m^*_{k_\nu}n^*_{k_\nu}}-a\right|>\varepsilon$. Если таких точек несколько, то через $(m^*_{k_\nu},\ n^*_{k_\nu})$ обозначим ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точки $(m_{k_\nu},\ n_{k_\nu})$; если и таких точек несколько, то через $(m^*_{k_\nu},\ n^*_{k_\nu})$ обозначим ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точек строки m_{k_ν}. Как и выше, можно показать, что $(m^*_{k_\nu}-1)/m_{k_\nu}\to\infty$, $(n^*_{k_\nu}-1)/n_{k_\nu}\to\infty$ $(k\to\infty)$ **(8)**. Таким образом, $S_{mn}\in K_\varepsilon$ $(|z-a|\leqslant\varepsilon)$ для $m_{k_\nu}\leqslant m<m^*_{k_\nu}-1$, $n_{k_\nu}\leqslant n\leqslant n^*_{k_\nu}-1$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$. Отсюда из (8) следует, что точка a является (t)-точкой последовательности $\{S_{mn}\}$.

Легко можно убедиться, что имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Если члены ряда (1) удовлетворяют условию $a_{mn}=0$ для $(m,\ n)\neq(m_k,\ n_k)$ $\lim\limits_{k\to\infty}m_{k+1}/m_k=\lim\limits_{k\to\infty}n_{k+1}/n_k=\infty$, то каждая точка множества E_1 является (t)-точкой последовательности $\{S_{mn}\}$.*

Пусть $E_1(m_k,\ n_k)$, E_2 — множества всех частичных пределов соответственно последовательностей $\{S_{m_kn_k}\}$ и $\{t_{mn}\}$, где $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел.

Теорема 1. *Пусть $A=\|a_{mn\mu\nu}\|$ — нижняя треугольная регулярная положительная матрица, удовлетворяющая условию (3) и $|S_{mn}|\leqslant C$, $C>0$ $(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Если множество G является (t)-множеством последовательности $\{S_{mn}\}$, то пересечение $E_2\cap G$ содержит, по крайней мере, одну точку.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что матрица $A=\|a_{mn\mu\nu}\|$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_{mn\mu\nu}=1$ $(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Пусть множество G является (t)-множеством последовательности $\{S_{mn}\}$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность прямоугольников $\Delta_k\{m_k,\ m_k';\ n_k,\ n_k'\}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, что $S_{mn}\in G_\varepsilon$ для $(m,\ n)\in\Delta_k$ и выполнены условия (4). Для достаточно больших k справедливы равенства

$$t_{m_k'n_k'} = \sum_{\mu=0}^{m_k'}\sum_{\nu=0}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{m_k-1}\sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} +$$
$$+\sum_{\mu=0}^{m_k-1}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} + \sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} +$$
$$+\sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} = \left(1-\sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}\right)S_{m_kn_k} +$$
$$+\sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{m_k-1}\sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} +$$
$$+\sum_{\mu=0}^{m_k-1}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu} + \sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_{m_kn_k\mu\nu}S_{\mu\nu} -$$
$$-\left(1-\sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}\right)S_{m_kn_k} = \tau_k +$$
$$+\sum_{\mu=0}^{m_k-1}\sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_{m_k'n_k'\mu\nu}(S_{\mu\nu}-S_{m_kn_k}) + \sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=0}^{n_k-1} a_{m_k'n_k\mu\nu}(S_{\mu\nu}-S_{m_kn_k}) +$$
$$+\sum_{\mu=0}^{m_k-1}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}(S_{\mu\nu}-S_{m_kn_k}), \tag{9}$$

где $\tau_k = \left(1-\sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}\right)S_{m_kn_k} + \sum_{\mu=m_k}^{m_k'}\sum_{\nu=n_k}^{n_k'} a_{m_k'n_k'\mu\nu}S_{\mu\nu}$.

Из-за ограниченности последовательности $\{S_{mn}\}$ и условий (3), (4) три последних слагаемых в правой части равенства (9) стремятся к нулю при $k\to\infty$, поэтому равенство (9) можем записать следующим образом: $t_{m_k'n_k'} = \tau_k + o(1)$ **(10).**

На основании известного факта [2, с. 15, теорема 1.1.1] число $\tau_k\in G_\varepsilon$ и, следовательно, из равенства (10) $t_{m_k'n_k'}\in G_{2\varepsilon}$ дкя всех достаточно больших k. Таким образом, пересечение $E_2 \cap G_{2\varepsilon}$ содержит, по крайней мере, одну точку. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и замкнутости множеств E_2 и G, следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $A = \|a_{mn\mu\nu}\|$ — *нижняя треугольная регулярная положительная матрица, удовлетворяющая условию (3); последовательность* $\{S_{mn}\}$ *частных сумм ряда (1) ограничена, и члены его удовлетворяют условию* $a_{mn} = o/(1/(m^2+n^2))$, *тогда* $E_1 \subseteq E_2$. *Если, кроме того, ряд* (1) *суммируется* A-*методом к числу* S, *то ряд* (1) *сходится к числу* S.

Теорема 3. *Пусть $A = \|a_{mn\mu\nu}\|$ — то же, что и в теореме 2; последовательность $\{S_{mn}\}$ частных сумм ряда (1) ограничена и члены его удовлетворяют условию $a_{mn} = 0$ для $(m, n) \neq (m_k, n_k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} m_{k+1}/m_k = \lim\limits_{k\to\infty} n_{k+1}/n_k = \infty$, тогда $E_1 \subseteq E_2$. Если, кроме того, ряд (1) суммируется A-методом к числу S, то он сходится к тому же числу S.*

Теоремы 2, 3 следуют из лемм 1, 2 и теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $A = \|a_{mn\mu\nu}\|$ — нижняя треугольная регулярная положительная матрица, удовлетворяющая условию (3). Если: 1) $|S_{mn}| \leqslant C$, $C > 0$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$; 2) $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел; 3) $\lim\limits_{k,\, m,\, n\to\infty} (S_{mn} - S_{m_k n}) = \lim\limits_{k,\, m,\, n\to\infty} (S_{mn} - S_{mn_k}) = 0$; в одном из четырех случаев: а) $m > m_k$, $n > n_k$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{m}{m_k} < \infty$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{n}{n_k} < \infty$; б) $m_k > m$, $n_k > n$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{m_k}{m} < \infty$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{n} < \infty$; в) $m > m_k$, $n_k > n$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{m}{m_k} < \infty$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{n} < \infty$; г) $m_k > m$, $n > n_k$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{m_k}{m} < \infty$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{n}{n_k} < \infty$, то $E_1(m_k, n_k) \subseteq E_2$. Если, кроме того, ряд (1) суммируется A-методом к числу S, то $S_{m_k n_k} \to S$ при $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая а). Для случаев б)—г) теорема доказывается аналогично.

Предположим, что множество $E_1(m_k, n_k)$ содержит точку a, не принадлежащую множеству E_2. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы круг K_ε $(|z - a| \leqslant \varepsilon)$ не содержал ни одной точки множества E_2. Существует подпоследовательность $\{S_{m_{k_p} n_{k_p}}\}$ последовательности $\{S_{m_k n_k}\}$ такая, что $S_{m_{k_p} n_{k_p}} \to a$ $(p \to \infty)$. Можем считать, что $S_{m_{k_p} n_{k_p}} \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}$ $\left(|z - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $p = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $S_{m_{k_p} n'_{k_p}}$ первую после $S_{m_{k_p} n_{k_p}}$ частную сумму в строке m_{k_p}, не принадлежащую кругу K_ε. Если такая сумма существует для каждого p, то из неравенств $\left|S_{m_{k_p} n'_{k_p}} - S_{m_{k_p} n_{k_p}}\right| > \frac{\varepsilon}{2}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, справедливость которых следует из построения последовательности $\{S_{m_{k_p} n_{k_p}}\}$, вытекает, что $\lim\limits_{p\to\infty} (S_{m_{k_p} n'_{k_p}} - S_{m_{k_p} n_{k_p}}) \neq 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{n'_{k_p}}{n_{k_p}} = \infty$ **(11)**. Если же для некоторого p суммы $S_{m_{k_p} j} \in K_\varepsilon$ для $n_{k_p} \leqslant j < \infty$, то за $S_{m_{k_p} n'_{k_p}}$ возьмем любую сумму, для которой $(n'_{k_p} - 1)/n_{k_p} > p$ **(12)**. Следовательно, учитывая (11), (12), $S_{m_{k_p} j} \in K_\varepsilon$ для $n_{k_p} \leqslant j \leqslant n'_{k_p} - 1$ $(p = 1, 2, \ldots)$, причем $\lim\limits_{p\to\infty} (n'_{k_p} - 1)/n_{k_p} = \infty$ **(13)**. Через $S_{m'_{k_p} n_{k_p}}$ обозначим первую после

$S_{m_{k_p} n_{k_p}}$ частную сумму в столбце n_{k_p}, не принадлежащую кругу K_ε. Как и выше, можно показать, что $S_{i n_{k_p}} \in K_\varepsilon$ для $m_{k_p} \leqslant i \leqslant \leqslant m'_{k_p} - 1$ $(p = 1, 2 \ldots)$, причем $\lim\limits_{p\to\infty} (m'_{k_p} - 1)/m_{k_p} = \infty$ **(14)**. Учитывая (13), (14) и рассматривая два случая, как и при доказательстве леммы 1, можно показать, что круг K_ε является (t)-множеством последовательности $\{S_{mn}\}$. Тогда по теореме 1 он должен иметь с множеством E_2, по крайней мере, одну общую точку, что невозможно в силу построения круга K_ε. Таким образом, множество $E_1(m_k, n_k)$ не имеет точек, не принадлежащих множеству E_2.

Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $A = \|a_{mn\mu\nu}\|$ — *нижняя треугольная регулярная положительная матрица, удовлетворяющая условию (3); S_{mn} — действительные числа; $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел. Пусть: 1)* $|S_{mn}| \leqslant C$, $C > 0$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$; *2)* $\underline{\lim}_{k\to\infty} (S_{mn} - S_{m_k n}) \geqslant 0$, $\underline{\lim}_{k\to\infty} (S_{mn} - S_{mn_k}) \geqslant 0$, *когда* $m > m_k$, $n > n_k$. $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{m}{m_k} < \infty$, $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{n}{n_k} < \infty$; 3) $\underline{\lim}_{k\to\infty} (S_{m_k n} - S_{mn}) \geqslant 0$, $\underline{\lim}_{k\to\infty} (S_{mn_k} - S_{mn}) \geqslant 0$, *когда* $m_k > m$, $n_k > n$, $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{m_k}{m} < \infty$, $\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{n_k}{n} < \infty$. *Тогда из условий 1), 2) следует* $\overline{\lim}_{m, n\to\infty} t_{mn} \geqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} S_{m_k n_k}$, *а из условий 1), 3)* — $\underline{\lim}_{m, n\to\infty} t_{mn} \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} S_{m_k n_k}$.

Если выполняются условия 1), 2), 3) и, кроме того, существует предел $\lim\limits_{m, n\to\infty} t_{mn} = S$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k n_k} = S$.

Список литературы: 1. *Давыдов Н. А.* О границах неопределенности при суммировании методами Чезаро и Пуассона-Абеля.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), с. 167—174. 2. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения.— М.: Наука, 1971.— 518 с.

Поступила в редколлегию 27.12.76