УДК 517.535.4

Л. И. БЕЗУГЛАЯ

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. II

Данная работа является продолжением статьи [1]. В ней приводятся доказательства сформулированных ранее [1] теорем.

Доказательство теоремы 1. Оценка исходной субгармонической функции $v(z)$ производится посредством сравнения ее со вспомогательной функцией $S(z)$ — потенциалом некоторой меры.

1^0. Построение вспомогательного потенциала. Рассмотрим систему кружков

$$\Pi_k = \left\{ z : \left| z - \frac{k\pi}{\omega} \right| < \frac{\pi}{4\omega} \right\} \ (k = 0, \ \pm 1, \ \ldots).$$

Назовем кружок Π_k кружком первого рода, если в этот кружок попала хотя бы одна точка, несущая меру $d\mu$, ассоциированную с $v(z)$ [2, гл. 1, § 2], и кружком второго рода, если он не несет такой меры. Обозначим через J_1 и J_2 множества индексов k таких, что Π_k — кружки первого и второго рода соответственно. С каждым индексом k свяжем некоторую меру $d\nu_k$ следующим образом.

Пусть $k \in J_1$; пусть ζ_k — какая-нибудь из точек кружка Π_k, несущая атом риссовской меры $d\mu$. Положим $d\nu_k(\zeta) = \varkappa\delta(\zeta - \zeta_k)$, где $\varkappa$ — константа, фигурирующая в формулировке теоремы 1, $\delta(\zeta - \zeta_k)$ — δ-функция, сосредоточенная в точке ζ_k. Если $k \in J_2$, то $v(z)$ гармонична в круге Π_k и, следовательно, по леммам 1 и 3 [1] емкость Грина множества

$$\Gamma_k = \{z : v(z) = v\left(\frac{k\pi}{\omega}\right)\} \cap \left\{z : \left|z - \frac{k\pi}{\omega}\right| < \frac{\pi}{4\omega}\right\}$$

относительно круга $\left|z - \frac{k\pi}{\omega}\right| < \frac{\pi}{2\omega}$ отграничена от нуля константой $c > 0$, не зависящей от v и k. Поэтому на Γ_k существует равновесная [3, гл. 2, § 1] относительно потенциала Грина круга $\left|z - \frac{k\pi}{\omega}\right| < \frac{\pi}{2\omega}$ мера. Нормируем ее условием $\int d\nu_k = \varkappa$. По лемме 2 [1] для логарифмического потенциала меры $d\nu_k$ верна оценка

$$\left|\int \ln|\zeta - z|\, d\nu_k(\zeta)\right| \leqslant N < \infty \left(\left|z - \frac{k\pi}{\omega}\right| \leqslant \frac{\pi}{2\omega},\ k \in J_2\right). \tag{1}$$

Равенство $\int d\nu_k(\zeta) = \varkappa$ выполнено и при $k \in J_1$, и при $k \in J_2$. Фиксируем ε, $0 < \varepsilon < 1 - \frac{\sigma}{\varkappa\omega}$. Пусть $\hat{\zeta}_k = \hat{\xi}_k + i\hat{\eta}_k$ — такая точка, что центр тяжести системы масс, состоящей из массы $d\nu_k$ и массы, сосредоточенной в точке $\hat{\zeta}_k$ и равной $-\varepsilon\varkappa$, расположен в точке $\zeta_k' = \frac{k\pi}{\omega} + ih$, где вещественное h будет выбрано несколько позже. Более формально, положим $d\rho_k(\zeta) = d\nu_k(\zeta) - \varepsilon\varkappa\delta(\zeta - \hat{\zeta}_k)$, где $\hat{\zeta}_k$ таково, что

$$\int \zeta\, d\rho_k(\zeta) = \left(\frac{k\pi}{\omega} + ih\right) \int d\rho_k(\zeta).$$

Последнее равенство однозначно определяет $\hat{\zeta}_k$:

$$\hat{\zeta}_k = \frac{1}{\varepsilon\varkappa} \int \zeta\, d\nu_k(\zeta) - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{k\pi}{\omega} + ih\right). \tag{2}$$

Заметим, что мера $d\rho_k$ незнакопостоянна и $\int d\rho_k(\zeta) = \varkappa(1-\varepsilon)$, $\int |d\rho_k(\zeta)| = \varkappa(1+\varepsilon)$.

Имеет место неравенство:

$$\left|\hat{\zeta}_k - \left(\frac{k\pi}{\omega} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\, ih\right)\right| < \frac{\pi}{4\omega\varepsilon}, \tag{3}$$

которое легко получается из (2), равенства $\frac{k\pi}{\omega} = \frac{1}{\varkappa} \int \frac{k\pi}{\omega}\, d\nu_k(\zeta)$ и оценки

$$\left|\frac{1}{\varkappa} \int \left(\zeta - \frac{k\pi}{\omega}\right) d\nu_k(\zeta)\right| \leqslant \frac{1}{\varkappa} \sup_{\zeta \in \pi_k} \left|\zeta - \frac{k\pi}{\omega}\right| \int d\nu_k(\zeta) = \frac{\pi}{4\omega}.$$

Из (3) следует, что точки $\hat{\zeta}_k$ лежат в полосе

$$-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} h - \frac{\pi}{4\omega\varepsilon} < \operatorname{Im} \zeta < -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} h + \frac{\pi}{4\omega\varepsilon}.$$

Выберем $h > 0$ таким, чтобы эта полоса и полоса $-\frac{\pi}{\omega} < \operatorname{Im}\zeta < \frac{\pi}{\omega}$ не пересекались. Например, положим для определенности $h = 2\pi\omega^{-1}(1-\varepsilon)^{-1}$. При таком выборе h будет выполняться неравенство

$$-\frac{3\pi}{\omega\varepsilon} < \operatorname{Im}\hat{\zeta}_k < -\frac{\pi}{\omega\varepsilon} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots). \tag{4}$$

Пусть

$$d\rho(\zeta) = \sum d\rho_k(\zeta), \quad S(z) = \int \ln|z-\zeta|\, d\rho_0(\zeta) + \\ + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{-n \leqslant k \leqslant n \\ k \neq 0}} \int \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\rho_k(\zeta). \tag{5}$$

Существование предела в (5) будет вытекать из дальнейших рассуждений. Отметим, что функция $S(z)$ не является субгармонической вследствие неположительности мер $d\rho_k(\zeta)$.

2^0. Оценка вспомогательного потенциала $S(z)$. При получении оценок потенциал S будет сравниваться с функцией

$$\varkappa(1-\varepsilon)\ln|\sin\omega(z-ih)| = (1-\varepsilon)\varkappa\ln|\omega(z-ih)| + \\ + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{-n \leqslant k \leqslant n \\ k \neq 0}} (1-\varepsilon)\varkappa\ln\left|1 - \frac{z}{\frac{k\pi}{\omega} + ih}\right|. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$S(z) - (1-\varepsilon)\varkappa\ln|\sin\omega(z-ih)| = \int \ln|z-\zeta|\, d\rho_0(\zeta) - \\ - (1-\varepsilon)\varkappa\ln|\omega(z-ih)| + \sum_{\substack{-\infty < k < \infty \\ k \neq 0}} \left\{\int \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\rho_k(\zeta) - \right. \\ \left. - (1-\varepsilon)\varkappa\ln\left|1 - \frac{z}{\frac{k\pi}{\omega} + ih}\right|\right\}, \tag{7}$$

где ряд, как будет показано, сходится.

Покажем прежде всего сходимость ряда

$$\sum_{\substack{-\infty < k < \infty \\ k \neq 0}} \left\{\int \ln|\zeta|\, d\rho_k(\zeta) - (1-\varepsilon)\varkappa\ln\left|\frac{k\pi}{\omega} + ih\right|\right\} = \\ = \sum_{\substack{-\infty < k < \infty \\ k \neq 0}} \int \ln\left|\frac{\zeta}{\frac{k\pi}{\omega} + ih}\right| d\rho_k(\zeta). \tag{8}$$

Обозначим через X_k носитель меры $d\rho_k = d\nu_k - \varkappa\varepsilon\delta(\zeta - \hat{\zeta}_k)$. Так как носитель меры $d\nu_k$ содержится в кружке Π_k, то, учитывая (4), получаем, что X_k содержится в круге $\left|\zeta-\frac{k\pi}{\omega}\right|<C_1<$ $<\infty$ (C_1 — некоторая константа). Имеем

$$\ln\left|\frac{\zeta}{\frac{k\pi}{\omega}+ih}\right|=\ln\left|1+\frac{\zeta-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)}{\frac{k\pi}{\omega}+ih}\right|,$$

и так как $|\ln|1+w|-\operatorname{Re} w|\leqslant C(\alpha)|w|^2$ ($|1+w|\geqslant\alpha>0$, $C(\alpha)$ зависит лишь от α), то для всех $\zeta\in X_k$ выполняется неравенство

$$\left|\ln\left|\frac{\zeta}{\frac{k\pi}{\omega}+ih}\right|-\operatorname{Re}\frac{\zeta-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)}{\frac{k\pi}{\omega}+ih}\right|\leqslant\frac{C_2}{\left|\frac{k\pi}{\omega}+ih\right|^2},$$

где $C_2<\infty$ не зависит от k. Поскольку точка $\zeta_k'=\frac{k\pi}{\omega}+$ $+ih$ — центр тяжести меры $d\rho_k$, то $\int\left\{\zeta-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)\right\}d\rho_k(\zeta)=0$ и, следовательно,

$$\left|\int\ln\left|\frac{\zeta}{\frac{k\pi}{\omega}+ih}\right|d\rho_k(\zeta)\right|\leqslant\frac{C_3}{\left|\frac{k\pi}{\omega}+ih\right|^2},\ C_3<\infty,$$

откуда вытекает абсолютная сходимость ряда (8). Поэтому

$$S(z)-(1-\varepsilon)\varkappa\ln|\sin\omega(z-ih)|=C_4+$$
$$+\sum_{-\infty<k<\infty}\int\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)}\right|d\rho_k(\zeta),\ C_4<\infty. \tag{9}$$

Пользуясь, как и раньше, тем, что $\zeta_k'=\frac{k\pi}{\omega}+ih$ — центр тяжести меры $d\rho_k$, получим, что при любом фиксированном $\delta>0$ и при любом z, лежащем вне δ-окрестности $X_{k,\delta}$ носителя X_k меры $d\rho_k$, выполняется неравенство

$$\left|\int\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)}\right|d\rho_k(\zeta)\right|\leqslant\frac{C_5}{\left|z-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)\right|^2},\ (z\,\bar{\in}\,X_{k,\delta}),$$

где $C_5<\infty$ зависит только от δ и, значит

$$\sum_{-\infty<k<\infty}\left|\int\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)}\right|d\rho_k(\zeta)\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_5\sum_{-\infty<k<\infty}\frac{1}{\left|z-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)\right|^2}\ (z\,\bar{\in}\,\bigcup_k X_{k,\delta}). \tag{10}$$

Пусть $X=\bigcup_k X_k$ — носитель меры $d\rho=\sum_k d\rho_k$; X_δ — δ-окрестность множества X. Тогда, как следует из (9) и (10), вне X_δ и вне кружков с центрами в точках $\frac{k\pi}{\omega}+ih$ радиуса δ_1 выполняется неравенство

$$|S(z)-(1-\varepsilon)\varkappa\omega|y||\leqslant C_6<\infty. \tag{11}$$

Так как в каждом из таких кружков функция $S(z)$ гармонична, неравенство (11) можно распространить с границы кружка на весь кружок.

Оценим функцию $S(z)$ на множествах Γ_k $k\in J_2$. Пусть $l\in J_2$— фиксированный индекс. Имеем

$$S(z)-(1-\varepsilon)\varkappa\ln|\sin\omega(z-ih)|=$$

$$=C_4+\sum_{\substack{-\infty<k<\infty\\ k\neq l}}\int\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\left(\frac{k\pi}{\omega}+ih\right)}\right|d\rho_k(\zeta)+$$

$$+\int\ln|z-\zeta|\,d\nu_l(\zeta)-\varkappa\varepsilon\ln|z-\hat{\zeta}_l|-$$

$$-(1-\varepsilon)\varkappa\ln\left|z-\left(\frac{l\pi}{\omega}+ih\right)\right|. \tag{12}$$

Для z из круга $\left|z-\frac{l\pi}{\omega}\right|\leqslant\frac{\pi}{\omega}$ выполняются неравенства

$$|\ln|z-\hat{\zeta}_l||\leqslant C_7;\quad \left|\ln\left|z-\left(\frac{l\pi}{\omega}+ih\right)\right|\right|\leqslant C_7<\infty.$$

Сумма в правой части (12) оценивается так же, как и прежде. Для оценки слагаемого $\int\ln|z-\zeta|\,d\nu_l(\zeta)$ воспользуемся неравенством (1). В результате для функции $S(z)$ получим оценку

$$|S(z)|\leqslant\tilde{C},\quad\left(\left|z-\frac{k\pi}{\omega}\right|\leqslant\frac{\pi}{2\omega},\ k\in J_2\right),$$

где $\tilde{C}<\infty$ зависит от ε, ω, $\varkappa$, но не зависит от $v(z)$.

3[0]. Оценка функции $v(z)$. Рассмотрим функцию $V(z)=v(z)-S(z)$. Функция $V(z)$ является субгармонической на дополнении к множеству $\bigcup\limits_{k\in J_2}\Gamma_k$ и допускает оценку сверху

$$V(z)<\sigma|z|-(1-\varepsilon)\varkappa\omega|y|+C_8,\ \left(z\,\overline{\in}\left(\bigcup_k\Gamma_k\right)\cup X_\delta\right) \tag{13}$$

($C_8<\infty$ не зависит от z). Кроме того, для каждой точки $z\in\bigcup\limits_{k\in J_2}\Gamma_k$ выполняется условие $v(z)=v\left(\frac{k\pi}{\omega}\right)\leqslant M$ и, следовательно,

$$\varlimsup_{z'\to z}V(z')\leqslant M+\tilde{C},\ \forall z\in\bigcup_{k\in J_2}\Gamma_k, \tag{14}$$

где $\tilde{C}$ зависит лишь от ε, ω, $\varkappa$.

Из (13) следует, что функция $V(z)$ ограничена в углах $\left|\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\theta$, где θ достаточно мало. Для оценки функции $V(z)$ в углах $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\theta)$, $|\arg z-\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\theta)$ рассмотрим функцию $V_\tau(z) = V(z) - \tau r^{\frac{1}{1-\theta}} \cos\frac{\varphi}{1-\theta}$, $z = re^{i\varphi}$, $\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\theta),\ z \overline{\in} \bigcup_{k \in J_2} \Gamma_k,\ \tau > 0 \text{ произвольно}\right)$.

Эта функция субгармонична на множестве $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\theta)$, $z \overline{\in} \bigcup_{k \in J_2} \Gamma_k$, и существует такая последовательность окружностей $|z| = R_k$, что $V_\tau(z) \to -\infty$ $(|z| = R_k,\ k \to \infty)$. Граничными точками множества $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\theta)$, $z \overline{\in} \bigcup_{k \in J_2} \Gamma_k$ могут являться лишь лучи $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}(1-\theta)$ и точки множества $\bigcup_{k \in J_2} \Gamma_k$. Поэтому

$$V_\tau(z) \leqslant \max\left(M + \widetilde{C},\ \sup_{\arg z = \pm\frac{\pi}{2}(1-\theta)} V(z)\right).$$

Так как τ произвольно мало, то $V(z) \leqslant M + C_9$ $(z \overline{\in} \bigcup_{k \in J_2} \Gamma_k)$, где C_9 не зависит от z. Из (14) и последнего неравенства следует, что $V(z) \leqslant M + \widetilde{C}$, $z \overline{\in} \bigcup_{k \in J_2} \Gamma_k$ ($\widetilde{C}$ — константа та же, что и в (14)). Поэтому $v(z) \leqslant S(z) + \widetilde{C} + M$ $(\forall z)$. Отсюда и из (11) вытекает, что при некотором y_0 $v(x+iy_0) \leqslant M + C_{10}$ $(-\infty < x < \infty)$, а, следовательно, имеет место неравенство $v(x) \leqslant M + C$ $(-\infty < x < \infty)$, где $C < \infty$ зависит лишь от ω, σ, $\varkappa$, но не зависит от v и M.

Теорема 1 доказана. Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично.

В заключение приношу благодарность В. Э. Кацнельсону за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Безуглая Л. И.* О субгармонических функциях комплексного переменного, ограниченных на последовательности точек вещественной оси. I. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с. 3—7. 2. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 432 с. 3. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М., Наука, 1966. 516 с.

Поступила 4 июля 1977 г.