УДК 517.95+517.55+513.88

М. Ф. БЕССМЕРТНЫЙ

ПРОХОДНЫЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУР И ФАКТОРИЗАЦИЯ J-РАСТЯГИВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В работе [1] было показано, что импедансы электрических цепей класса Мин Най-да целесообразно рассматривать как функции не одной, как это принято в теории электрических цепей, а двух комплексных переменных. Введение двух переменных связано с тем, что цепь Мин Най-да состоит из элементов двух сортов: «реальных» индуктивностей L одинакового качества $k_\mu \geqslant 0$ и «реальных» конденсаторов C одинакового качества $k_\varepsilon \geqslant 0$. Импедансы таких элементов имеют вид

$$(\lambda + k_\mu) L = \lambda^\mu L; \quad 1/(\lambda + k_\varepsilon) C = 1/\lambda^\varepsilon C.$$

В общем случае в цепи может быть не два «сорта» элементов, а больше. Более того, конкретная зависимость импедансов элементов от частоты λ несущественна. Мы, таким образом, приходим к ситуации, когда имеется m «сортов» элементов с импедансами вида az_i $(a \geqslant 0)$ и функция цепи зависит от m переменных $z_1, \ldots, z_m$.

Электрические цепи являются удобной моделью для описания многих линейных физических систем, поэтому результаты целесообразно формулировать для несколько более общего объекта — конечной линейной структуры.

В § 1 настоящей работы рассматриваются проходные матрицы конечных линейных структур как функции m переменных и показывается, что при наложении на рассматриваемую линейную структуру некоторых достаточно общих ограничений ее проходная матрица обладает свойствами J-растягиваемости и J-унитарности. Под J мы в дальнейшем будем подразумевать одну из матриц:

$$J_\Pi = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right]; \quad J_H = \left[\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right],$$

где I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

§ 2 есть непосредственное продолжение работы [1]. Здесь изучаются проходные матрицы электрических цепей класса Мин Най-да. Показано, что для J-растягивающих матриц-функций двух переменных, с необходимостью являющихся проходными матрицами, имеет место мультипликативное представление. Это представление позволяет (используя каскадный синтез, описанный в [2]) восстановить схему и параметры цепи по ее проходной матрице.

§ 1. Под линейной структурой мы понимаем некоторый граф. С каждым ребром графа (внутренним элементом структуры) сопоставлена пара величин U_j и I_j (их природой мы сейчас не интересуемся). Эти величины связаны функциональной зависимостью $U_j = g_j(I_j)$, своей для каждого ребра графа. Если все зависимости линейны (т. е. $U_j = z_j I_j$, где z_j — так называемые «импедансы» ребер), то структуру будем называть линейной. Кроме того, имеется n пар вершин графа, образующие «вход», и n пар вершин, образующие «выход» структуры. С помощью входа и выхода структура соединяется с другими (внешними по отношению к ней) структурами. Мы предполагаем:

а) каждую часть внешних структур, «подключенную» к одной какой-либо паре входных (выходных) вершин, можно условно заменить одним ребром и сопоставить ему пару величин U_k и I_k, так что состояние входа (выхода) полностью характеризуется $2n$-мерными векторами f_{in} (вход) и f_{out} (выход):

$$f_{\text{in}} = \left[U_1^{\text{in}}, \ldots, U_n^{\text{in}}, I_1^{\text{in}}, \ldots, I_n^{\text{in}}\right];$$
$$f_{\text{out}} = \left[U_1^{\text{out}}, \ldots, U_n^{\text{out}}, -I_1^{\text{out}}, \ldots, -I_n^{\text{out}}\right].$$

Знак минус при I_k^{out} — традиция, пришедшая из теории электрических цепей (именно в этом случае при каскадном соединении структур их проходные матрицы перемножаются) [см. 2];

б) структура, рассматриваемая совместно с входными и выходными ребрами, является графом Кирхгофа (определение смотри ниже).

В случае конечных линейных структур почти всегда можно получить соотношение

$$f_{\text{out}} = f_{\text{in}} A(z_1, \ldots, z_m),$$

где $A(z_1, \ldots, z_m)$ — матрица размера $2n \times 2n$ (проходная матрица структуры), а $z_1, \ldots, z_m$ — «импедансы» внутренних ребер. Для изучения свойств проходной матрицы нам понадобится теорема Ланжевена для графа Кирхгофа. J-свойства проходной матрицы мы получим как логические следствия этой теоремы.

Граф G называется графом Кирхгофа, если:

1) число вершин и число ребер графа — конечно, причем каждое ребро инцидентно точно одной паре вершин;

2) ребра и циклы графа ориентированы;

3) каждому ребру $p_{\alpha\beta}$ (α, β — вершины графа) сопоставлены величины $U_{\alpha\beta}$ и $I_{\alpha\beta}$ ($U_{\alpha\beta} = -U_{\beta\alpha}$, $I_{\alpha\beta} = -I_{\beta\alpha}$) (их природу мы не конкретизируем; величины $U_{\alpha\beta}$ могут принадлежать одной абелевой группе, а $I_{\alpha\beta}$ — другой.

При этом выполняются: а) 1-й закон Кирхгофа: $\sum_{\alpha=\alpha_0} I_{\alpha\beta}=0$ для любой вершины α_0 графа G; б) 2-й закон Кирхгофа: $\sum_{\text{ц}} U_{\alpha\beta}=0$ при обходе любого замкнутого цикла «ц» графа G.

4) Определено умножение IU величин I и U, не обязательно коммутативное, но согласованное со сложением (дистрибутивность).

Теорема Ланжевена. *Для всякого графа Кирхгофа выполняется соотношение* $\sum I_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}=0$ (*сумма берется по всем ребрам графа*).

Доказательство. Не ограничивая общности, граф можно считать связным. Фиксируем какую-либо вершину α_0 графа G и введем «потенциал» $\Phi(\alpha)$ произвольной вершины α: $\Phi(\alpha)=\sum_{\Pi(\alpha_0,\alpha)} U_{\alpha'\beta'}$ (суммирование проводится вдоль пути $\Pi(\alpha_0,\alpha)$, исходящего из вершины α_0 и заканчивающегося в вершине α). В силу пункта 3, *б* $\Phi(\alpha)$ не зависит от пути.

$$\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha\beta}(\Phi(\beta)-\Phi(\alpha));$$

но

$$\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha\beta}\Phi(\beta)=\sum_{\beta}\left[\sum_{\alpha} I_{\alpha\beta}\right]\Phi(\beta)=0,$$

так как (в силу пункта 3, *а* определения графа Кирхгофа) сумма в квадратных скобках равна нулю. Аналогично для второго слагаемого. Теорема доказана.

Переходя к рассмотрению проходных матриц конечных линейных структур, мы будем считать, что I_j и U_j — векторы-строки одинаковой размерности, так что z_j — квадратные матрицы. Роль умножения играет скалярное произведение: $I_jU_j^*$ или $U_jI_j^*$. Ясно, что теорему Ланжевена в этом случае можно записать в виде

$$\sum I_jU_j^* \pm U_jI_j^*=0. \tag{1}$$

Преобразуем рассматриваемую конечную линейную структуру в граф Кирхгофа и запишем теорему Ланжевена в форме (1):

$$-\sum_{\text{out}} I_jU_j^* \pm U_jI_j^* - \sum_{\text{in}} I_jU_j^* \pm U_jI_j^* = \sum_{\text{int}} I_jU_j^* \pm U_jI_j^*.$$

Здесь суммы берутся по всем выходным (out), входным (in) и внутренним (int) ребрам структуры. Используя матрицы J_Π и J_H нужных размеров, это соотношение перепишем в виде

$$f_{\text{out}}Jf_{\text{out}}^* - f_{\text{in}}Jf_{\text{in}}^* = \sum_{\text{int}} [U_j, I_j]\, J\, [U_j, I_j]^*.$$

Учитывая, что $f_{\text{out}}=f_{\text{in}}A(z)$, а на внутренних ребрах выполняются соотношения $U_j=I_jz_j$, получаем

$$f_{\text{in}}[A(z)JA^*(z)-J]f_{\text{in}}^* = \sum_{\text{int}} I_j[z_j, I]\,J\,[z_j, I]^*I_j^*$$

для любого вектора f_{in}, описывающего состояние входа. Поэтому проходная матрица конечной линейной структуры с необходимостью удовлетворяет условиям:

$$A(z)JA^*(z) - J \geqslant 0 \quad \text{при} \quad [z_i,\ I]J[z_i,\ I]^* \geqslant 0; \qquad (2)$$
$$A(z)JA^*(z) - J \leqslant 0 \quad \text{при} \quad [z_i,\ I]J[z_i,\ I]^* \leqslant 0.$$

Эти соотношения содержат четыре условия на проходную матрицу (два для $J = J_{\text{П}}$ и два для $J = J_H$).

Формулировка и доказательство теоремы Ланжевена (в том виде, который приведен здесь) принадлежат В. Э. Кацнельсону. Им же был указан путь получения J-свойств проходной матрицы без «физической» конкретизации элементов, из которых «составлена» структура.

§ 2. В работе [1] нами были введены электрические цепи класса Мин Най-да. Ясно, что $4n$-полюсник класса Мин Най-да можно рассматривать как конечную линейную структуру. Импедансы элементов в этом случае имеют вид

$$z_j = L_j\lambda^{\mu},\ (L_j \geqslant 0) \quad \text{или} \quad z_j = \frac{1}{C_j\lambda^{\varepsilon}},\ (C_j > 0),$$

где λ^{μ} и λ^{ε} — комплексные числа (подробнее см. [1]). По самому построению проходная матрица $w = w(\lambda^{\mu},\ \lambda^{\varepsilon})$ $4n$-полюсника Мин Най-да является рациональной квадратной матрицей-функцией переменных λ^{μ} и λ^{ε} с вещественными коэффициентами. Учитывая это, а также соотношения (2), получаем, что проходная матрица $4n$-полюсника Мин Най-да с необходимостью удовлетворяет условиям:

$$1)\ w^*J_{\text{П}}w - J_{\text{П}} \geqslant 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda^{\mu} \geqslant 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda^{\varepsilon} \geqslant 0; \quad 2)\ w^*J_{\text{П}}w - J_{\text{П}} \leqslant 0,$$
$$\operatorname{Re}\lambda^{\mu} \leqslant 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda^{\varepsilon} \leqslant 0; \quad 3)\ w^*J_Hw - J_H \geqslant 0,\ \ \operatorname{Im}\lambda^{\mu} \geqslant 0,\ \ \operatorname{Im}\lambda^{\varepsilon} \leqslant 0;$$
$$4)\ w^*J_Hw - J_H \leqslant 0,\ \ \operatorname{Im}\lambda^{\mu} \leqslant 0,\ \ \operatorname{Im}\lambda^{\varepsilon} \geqslant 0;$$
$$5)\ \overline{w(\overline{\lambda^{\mu}},\ \overline{\lambda^{\varepsilon}})} \equiv w(\lambda^{\mu},\ \lambda^{\varepsilon}).$$

Множество матриц-функций $w(\lambda^{\mu},\ \lambda^{\varepsilon})$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, будем обозначать через $\boldsymbol{M}^{(2)}$.

Наша задача — показать, что любая матрица-функция $w = w(\lambda^{\mu},\ \lambda^{\varepsilon})$ класса $\boldsymbol{M}^{(2)}$ есть проходная матрица некоторого $4n$-полюсника класса Мин Най-да. Для этого нам понадобится хорошо изученный класс $\boldsymbol{M}^{(1)}$ рациональных квадратных матриц-функций $w(\lambda)$ комплексной переменной λ, удовлетворяющих условиям:

$$1)\ w^*(\lambda)J_{\text{П}}w(\lambda) - J_{\text{П}} \geqslant 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0; \quad 2)\ w^*(\lambda)J_{\text{П}}w(\lambda) -$$
$$- J_{\text{П}} \leqslant 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0; \quad 3)\ w'(\lambda)J_Hw(\lambda) - J_H \equiv 0;$$
$$4)\ \overline{w(\overline{\lambda})} \equiv w(\lambda).$$

Для матриц-функций класса $\boldsymbol{M}^{(1)}$ известно [2] мультипликативное представление

$$w(\lambda) = \left[\overset{\curvearrowright}{\prod_{i=1}^{\nu}} \omega_i(\lambda)\right] T,$$

где $\omega_j(\lambda)$ — элементарные (или примарные) множители класса $\boldsymbol{M}^{(1)}$; T — постоянная матрица этого же класса (теорема Потапова). Кроме того, из определения класса $\boldsymbol{M}^{(1)}$ следует, что любая $w(\lambda) \in \boldsymbol{M}^{(1)}$ имеет следующий вид:

$$w(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{11}(\lambda^2) & \lambda\varphi_{12}(\lambda^2) \\ \hline \lambda\varphi_{21}(\lambda^2) & \varphi_{22}(\lambda^2) \end{array}\right], \tag{3}$$

где φ_{ij} — блок матрицы размера $n \times n$.

Покажем, что любая $w(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ класса $\boldsymbol{M}^{(2)}$ имеет аналогичный вид:

$$w(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{11}(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon) & \lambda^\mu\varphi_{12}(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon) \\ \hline \lambda^\varepsilon\varphi_{21}(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon) & \varphi_{22}(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon) \end{array}\right], \tag{4}$$

где $\varphi_{ij}(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon)$ (размера $n \times n$) зависят от произведения $\lambda^\mu\lambda^\varepsilon$.

С этой целью рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$p = [A\tilde{w} + B][C\tilde{w} + D]^{-1}, \tag{5}$$

где

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],\quad B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right],\quad C = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],\quad D = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array}\right].$$

Оно определено на тех $\tilde{w}$, у которых блок-матрица $\tilde{w}_{21}$ (размера $n \times n$) неособенная. В силу тождеств

$$p + p^* = [C\tilde{w} + D]^{-1*}[\tilde{w}^* J_{\text{П}} \tilde{w} - J_{\text{П}}][C\tilde{w} + D]^{-1};$$

$$i[p^* - p] = [C\tilde{w} + D]^{-1*}[\tilde{w}^* J_H \tilde{w} - J_H][C\tilde{w} + D]^{-1}$$

дробно-линейное преобразование матрицы-функции $\tilde{w}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ класса $\boldsymbol{M}^{(2)}$ есть позитивная матрица-функция $p(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$.

По теореме 2 работы [1]

$$p(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = \lambda^\mu \Psi(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon),$$

где $\Psi(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon)$ зависит от произведения $\lambda^\mu\lambda^\varepsilon$.

Возвращаясь к $\tilde{w}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ с помощью преобразования, обратного к преобразованию (5), получим для $\tilde{w}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)$ (с неособенным блоком $\tilde{w}_{21}$) вид (4). Теперь заметим, что если

$$w(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) = \{w_{ij}(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)\}_{i,j=1}^{2} \in \boldsymbol{M}^{(2)}$$

(здесь w_{ij} — блок-матрицы размера $n \times n$), то $w(\lambda, \lambda) \in \boldsymbol{M}^{(1)}$ и поэтому ее диагональные блоки $w_{ii}(\lambda, \lambda)$ неособенны всюду, за исключением конечного числа точек. Но тогда блоки $w_{ii}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ — неособенны вне некоторого исключительного множества (так как $w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ — рациональная функция переменных λ^{μ} и λ^{ε}). Кроме того, при любой $w \in \boldsymbol{M}^{(2)}$ матрица-функция

$$\tilde{w}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = w_0(\lambda^{\mu})\, w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}),$$

где

$$w_0(\lambda^{\mu}) = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline (\lambda^{\mu})^{-1} I_n & I_n \end{array}\right],$$

принадлежит классу $\boldsymbol{M}^{(2)}$ и ее блок-матрица

$$\tilde{w}_{21}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = (\lambda^{\mu})^{-1} w_{11}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = w_{21}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$$

неособенная. Для этого достаточно рассмотреть блок $\tilde{w}_{11}$ матрицы-функции

$$\hat{w}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = w_0^{-1'}(\lambda^{\mu})\, w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) \in \boldsymbol{M}^{(2)}$$

(штрих означает операцию транспонирования матрицы) и заметить, что

$$\tilde{w}_{21}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = (\lambda^{\mu})^{-1}\, \hat{w}_{11}(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})).$$

В силу сказанного, любая $w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ класса $\boldsymbol{M}^{(2)}$ имеет вид (4). Как легко видеть, такой вид сохраняется при перемножении, т. е. в этом смысле класс $\boldsymbol{M}^{(2)}$ мультипликативен.

Сопоставляя выражения (3) и (4), мы приходим к следующей лемме.

Лемма. *Отображение*

$$\pi : w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) \to w(\lambda, \lambda)$$

устанавливает взаимно-однозначное и мультипликативно-инвариантное соответствие между классами $\boldsymbol{M}^{(2)}$ *и* $\boldsymbol{M}^{(1)}$ *J-растягивающих матриц-функций. Мультипликативная инвариантность означает следующее: если* $w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = w_1(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})\, w_2(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ *и их образами являются матрицы-функции* $w(\lambda)$, $w_1(\lambda)$ *и* $w_2(\lambda)$ *соответственно, то* $w(\lambda) = w_1(\lambda)\, w_2(\lambda)$. *Мультипликативная инвариантность отображения* π *и обратного ему* π^{-1} *позволяет перенести на класс* $\boldsymbol{M}^{(2)}$ *(теорема 1) теорему В. П. Потапова о мультипликативной структуре матриц-функций* $w(\lambda)$ *класса* $\boldsymbol{M}^{(1)}$.

Доказательство леммы. Взаимная однозначность и мультипликативная инвариантность отображений π и π^{-1} очевидна. Покажем, что если $w(\lambda)$ (вида (3)) принадлежит классу $\boldsymbol{M}^{(1)}$, то соответствующая ей $w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ (вида (4)) принадлежит $M^{(2)}$. В силу равенств

$$w^*(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})\, J_{\text{П}} w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) - J_{\text{П}} = (\lambda^{\mu} + \overline{\lambda^{\mu}})\, W_1 + (\lambda^{\varepsilon} + \overline{\lambda^{\varepsilon}})\, W_2;$$

$$w^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) J_H w(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) - J_H = i(\overline{\lambda^\mu} - \lambda^\mu) W_1 + i(\lambda^\varepsilon - \overline{\lambda^\varepsilon}) W_2,$$

где

$$W_1 = \frac{w^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\overline{\lambda^\varepsilon} I_n \\ \hline \lambda^\varepsilon I_n & 0 \end{array}\right] w(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) - \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\overline{\lambda^\varepsilon} I_n \\ \hline \lambda^\varepsilon I_n & 0 \end{array}\right]}{\lambda^\mu\lambda^\varepsilon - \overline{\lambda^\mu\lambda^\varepsilon}};$$

$$W_2 = \frac{w^*(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon)\left[\begin{array}{c|c} 0 & \lambda^\mu I_n \\ \hline -\overline{\lambda^\mu} I_n & 0 \end{array}\right] w(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) - \left[\begin{array}{c|c} 0 & \lambda^\mu I_n \\ \hline -\overline{\lambda^\mu} I_n & 0 \end{array}\right]}{\lambda^\mu\lambda^\varepsilon - \overline{\lambda^\mu\lambda^\varepsilon}},$$

достаточно доказать неравенства

$$W_1(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \geqslant 0; \quad W_2(\lambda^\mu, \lambda^\varepsilon) \geqslant 0.$$

Докажем, например, второе. Для этого введем матрицу-функцию

$$w_2(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon) = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & \lambda^\mu I_n \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \varphi_{11} & \lambda^\mu \varphi_{12} \\ \hline \lambda^\varepsilon \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & \lambda^\mu I_n \end{array}\right]^{-1},$$

зависящую от произведения $\lambda^\mu\lambda^\varepsilon$, и перепишем второе неравенство в эквивалентном виде:

$$\frac{w_2^*(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon\left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right] w_2(\lambda^\mu\lambda^\varepsilon) - \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right]}{\lambda^\mu\lambda^\varepsilon - \overline{\lambda^\mu\lambda^\varepsilon}} \geqslant 0.$$

Обозначая $\lambda^\mu\lambda^\varepsilon = \lambda^2$ и обрамляя последнее неравенство справа матрицей $S = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & \lambda I_n \end{array}\right]$, а слева S^*, получим

$$\frac{w^*(\lambda)\left[\begin{array}{c|c} 0 & \lambda I_n \\ \hline -\bar{\lambda} I_n & 0 \end{array}\right] w(\lambda) - \left[\begin{array}{c|c} 0 & \lambda I_n \\ \hline -\bar{\lambda} I_n & 0 \end{array}\right]}{\lambda^2 - \overline{\lambda^2}} \geqslant 0, \tag{6}$$

где $w(\lambda)$ — исходная матрица-функция класса $\boldsymbol{M}^{(1)}$ ($w(\lambda)$ имеет вид (3)).

Для того чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства, воспользуемся известным неравенством [см. 3] для матриц-функций $w(\lambda)$ класса $\boldsymbol{M}^{(1)}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{w^*(\lambda) J_\Pi w(\lambda) - J_\Pi}{\bar{\lambda} + \lambda} & \dfrac{w^*(\lambda) J_H w(\lambda) - J_H}{i(\bar{\lambda} - \lambda)} \\ \hline \dfrac{w^*(\lambda) J_H w(\lambda) - J_H}{i(\bar{\lambda} - \lambda)} & \dfrac{w^*(\lambda) J_\Pi w(\lambda) - J_\Pi}{\bar{\lambda} + \lambda} \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Обрамляя это неравенство слева матрицей $T = [I_{2n}, \ -I_{2n}]$, а справа T^*, получим неравенство, совпадающее с (6). Лемма доказана.

Теперь имеет смысл следующее

Определение. *Матрицу-функцию* $\omega(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ *класса* $\boldsymbol{M}^{(2)}$ *будем называть элементарной (примарной), если соответствующая ей* $\omega(\lambda) = \pi[\omega(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})]$ *класса* $\boldsymbol{M}^{(1)}$ *является элементарной (примарной).*

Как следствие только что доказанной леммы и теоремы Потапова о мультипликативной структуре матриц-функций $w(\lambda)$ класса $\boldsymbol{M}^{(1)}$ получаем теорему.

Теорема 1. *Каждая* $w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ *класса* $\boldsymbol{M}^{(2)}$ *допускает мультипликативное представление*

$$w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon}) = \left[\overset{\curvearrowright}{\prod_{j=1}^{\nu}} \omega_j(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})\right] T,$$

где T *— постоянная матрица класса* $\boldsymbol{M}^{(2)}$, *а* ω_j *— простейшие (элементарные или примарные) матрицы-функции класса* $\boldsymbol{M}^{(2)}$.

Доказательство очевидно.

Теорема 1 позволяет восстановить схему и параметры элементов $4n$-полюсника класса Мин Най-да по заданной проходной матрице $w(\lambda^{\mu}, \lambda^{\varepsilon})$ путем каскадного синтеза, описанного в статье [2]. При этом схемы элементарных $4n$-полюсников сохраняются, но идеальные элементы, из которых они составлены, заменяются «реальными» (описание «реальных» элементов приведено в работе [1]).

Список литературы: 1. *Бессмертный М. Ф.* Импедансы электрических цепей класса Мин Най-да как аналитические функции двух комплексных переменных.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с. 7—12. 2. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающиеся матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, т. 28, № 1, с. 75—130. 3. *Ефимов А. В.* Основные классы проходных матриц-функций и их роль в синтезе электрических цепей. Дис.... канд. физ.-мат. наук/Одесский пед. ин-т, 1969.

Поступила 18 марта 1978 г.