УДК 517.535.4

Г. З. БЕР

О ЯВЛЕНИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ И ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В настоящей статье изучается явление интерференции на классе целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) в интегральной метрике и вопрос о порядке приближения ц. ф. э. т., принадлежащими $L_p(-\infty, \infty)$.

Известно [см., например, 1, с. 108], что если ц. ф. э. т. не большего π удовлетворяет условиям $\{F(k)\}_{-\infty}^{\infty} \in l^p$ при $1 < p < \infty$ и $F(x) = 0(1)$ при $|x| \to \infty$, то $F(x) \in L_p(-\infty, \infty)$. При $p = 1$ и $p = \infty$ аналогичное утверждение не имеет места (при $p = \infty$ вместо $F(x) = 0(1)$ естественно считать, что $F(x) = 0(|x|)$). Однако С. Н. Бернштейн доказал, что если ц. ф. $F(z)$ э. т. не большего π удовлетворяет условиям $|F(n)| \leqslant 1$ и $F(x) = 0(|x|)$ при $|x| \to \infty$, то

$$\left| F\left(x + \frac{1}{2}\right) + F\left(x - \frac{1}{2}\right) \right| \leqslant 8/\pi.$$

С. Н. Бернштейн назвал это явление явлением интерференции. Позже его в равномерной метрике (при $p = \infty$) изучали также А. Ф. Тиман, Р. Боас, Н. И. Ахиезер, Б. Я. Левин и др. [2—5]. В § 1 работы рассматриваются подобные вопросы в L_1-норме (см. теоремы 1 и 2). В частности, найдены точные константы интерференции. Далее, найден аналог одной теоремы Б. Я. Левина из [1] (теорема 3). Из теорем об интерференции выводятся теоремы типа Винера — Картрайт.

В § 2 работы обобщенная теорема Д. Джексона о приближении ц. ф. э. т. [см., например, 2, с. 274] усиливается в том смысле, что указывается ц. ф. э. т. с заданным точным порядком приближения, определяемым модулем непрерывности. Подобная теорема получена впервые Р. М. Тригубом [см. 6] для периодических функций. Доказываемая в § 2 теорема является обобщением одной теоремы Б. Л. Голинского [7].

§ 1. Определим класс L_π^m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ как множество ц. ф. $F(z)$ э. т. не большего π таких, что $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)| < \infty$ и $F(x) = 0(|x|^{m-1})$ при $|x| \to \infty$. Ниже рассматривается явление интерференции на этом классе, аналогичное явлению интерференции, рассмотренному в [4, с. 207]. Получим сначала интегральное представление для функций этого класса.

Если $F(z) \in L_\pi^m$, то

$$F(z) = P(z) \sin \pi z + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itz} dt, \tag{1}$$

где $P(z)$ — полином степени не больше $m-2$ (при $m=$ $P(z)\equiv 0$), $f(t)\in A[-\pi,\pi]$, т. е. разлагается на $[-\pi,\pi]$ в абсо лютно сходящийся ряд Фурье. Действительно, рассмотрим

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-itz}dt,$$

где $f(t)\in A[-\pi,\pi]$, причем

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}dt=F(k).$$

Так как $\hat{f}(x)=0(1)$ при $|x|\to\infty$ по теореме Римана — Лебега, $\hat{f}(k)=F(k)$ и $\hat{f}(z)$ — ц. ф. э. т. не большего π, то

$\Phi(z)=F(z)-\hat{f}(z)$ тоже ц. ф. э. т. не большего π, $\Phi(z)\in L_\pi^m$ и, кроме того, $\Phi(k)=0$ $(k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

Воспользуемся следующим предложением [3, с. 125]. Если $\Phi(z)$ — ц. ф. э. т не большего π, $\Phi(x)=0(|x|^q)$ при $|x|\to\infty$ и $\Phi(k)=0$ $(k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$, тогда $\Phi(z)=P(z)\sin\pi z$, где $P(z)$ — полином степени меньше q. Таким образом, представление (1) доказано. Очевидно, что $F(z)$ представимо в виде (1) единственным образом. Исходя из (1), выведем теперь для $F(z)\in L_\pi^m$ интерполяционную формулу (при этом интегрируем почленно равномерно сходящийся ряд):

$$F(z)=P(z)\sin\pi z+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\,e^{ikt}e^{-itz}dt=P(z)\sin\pi z+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(k-z)}dt.$$

Отсюда

$$F(z)=P(z)\sin\pi z+\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\,\frac{\sin\pi(z-k)}{\pi(z-k)}. \tag{2}$$

Будем называть линейный оператор $\Lambda(F)$, отображающий пространство L_π^1 в себя, интерференционным, если $\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda(F,x)|\,dx\leqslant$ $\leqslant c\sum_{k=-\infty}^{\infty}|F(k)|$, где c — абсолютная константа.

Теорема 1. *Для того чтобы линейный непрерывный относительно равномерной сходимости на любом компакте оператор $\Lambda(F)$ был интерференционным и притом перестановочным с оператором сдвига на единицу, необходимо и достаточно, чтобы он представлялся в виде*

$$\Lambda(F,z)=\int_{-\pi}^{\pi}\lambda(t)\,f(t)\,e^{-itz}dt, \tag{3}$$

где $f(t)$ *из* (1) *и* $\hat{\lambda}(x) \in L(-\infty, \infty)$. *Причем для оператора вида* (3) *выполняется соотношение*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(F, x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(x)|\, dx \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)|, \tag{4}$$

и константа $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(x)|\, dx$ *точная на классе* L_{π}^{1}.

Доказательство. *Необходимость.* Используя (2) при $P(z) \equiv 0$, имеем

$$\Lambda(F, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\, \Lambda\left[\frac{\sin \pi(z-k)}{\pi(z-k)},\ x\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\, \psi(x-k),$$

где $\psi(x) = \Lambda\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z},\ x\right)$ — ц. ф. э. т. не большего π, интегрируемая на вещественной оси. Поэтому $\exists\, \lambda(t)$ финитная с носителем на $[-\pi, \pi]: \Psi(z) = \hat{\lambda}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t)\, e^{-itz} dt$ и, следовательно,

$$\Lambda(F, x) = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{-it(x-k)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t)\, f(t)\, e^{-ixt} dt.$$

Представление (3) доказано.

Достаточность. Пусть $\Lambda(F)$ представимо в виде (3). Воспользуемся известным неравенством [см., например, 2, с. 248].

$$\sup_{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t+k)| \leqslant (\pi+1) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\forall x;\ \lambda(t)\, e^{-itx}$ разлагается в абсолютно, а значит, и равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\lambda(t)\, e^{-itx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x)\, e^{ikt},\quad \lambda_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(t)\, e^{-itx} e^{-ikt} dt = \hat{\lambda}(x+k).$$

Поэтому

$$\Lambda(F, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(x+k)\, e^{ikt} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(x+k) \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{ikt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(x+k)\, F(-k),$$ откуда

$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(F, x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)|$. Соотношение (4) доказано. Рассмотрим функцию

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{itz} dt = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Очевидно, $F_0(z) \in L^1_\pi$ и $\Lambda(F_0, \quad x) = \hat{\lambda}(-x)$. Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(F_0, \ x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda(t)|\, dt$. Отсюда следует, что константа $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt$ в (4) является точной на классе L^1_π и достигается на функции $F_0(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$. Теорема доказана.

Следствие. Если ц. ф. $F(z)$ э. т. меньшего π и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)| < \infty, \text{ то } F(x) \in L(-\infty, \infty).$$

Доказательство. Так как $|F(iy)|\, e^{-\pi |y|} \to 0$ при $|y| \to \infty$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)| < \infty$, то [1, с. 101—103] $F(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} F(k) \times \times \frac{\sin \pi (z-k)}{\pi (z-k)}$,т. е. $F(z) \in L^1_\pi$. Отсюда $F(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-itz} dt$, где $f(t) \in A(-\pi, \pi]$. Но $F(z)$ э. т. меньшего π, поэтому в силу теоремы Винера — Пэли $\exists \varepsilon > 0$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(t)\, e^{-itz} dt.$$

Применяя теорему (1) при

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant \pi - \varepsilon \\ \frac{\pi - |x|}{\varepsilon}, & \pi - \varepsilon \leqslant |x| \leqslant \pi \\ 0, & \pi \leqslant |x|, \end{cases}$$

получим $\Lambda(F) \in L(-\infty, \infty)$, но $\Lambda(F) = F$. Следствие доказано. Заметим, что это утверждение по сути есть у Винера [6, с. 106].

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 было попутно доказано, что

$$\Lambda(F) \in L(-\infty, \infty) \ \forall F \in L^1_\pi \leftrightarrow \Lambda(F_0) \in L(-\infty, \infty), \text{ где}$$

а нужно добавить перестановоч-
ность со сдвигом

$$F_0(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Замечание 2. Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} |\hat{\lambda}(t)|\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{1} |\hat{\lambda}(k+t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(k+t)|\, dt, \text{ то } \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(k+t)|.$$

Это неравенство, а также (4) позволяют оценить константу интерференции на классе L_π^1 через константу интерференции в равномерной метрике, и наоборот, для одной и той же функции λ [4, с. 211].

Рассмотрим теперь примеры конкретных операторов. Для случая интерференции в равномерной метрике подобные операторы уже рассматривались ранее [см., например, 4].

1. $\lambda(t) = e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}}$ на $[-\pi, \pi]$ и $\lambda(t) = 0$ вне $[-\pi, \pi]$. В этом случае $\forall F \in L_\pi^1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F\left(x+\frac{1}{2}\right)+F\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos \pi t}{t^2-\frac{1}{4}}\right|dt \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty}|F(k)|.$$

Если еще $F(x) \geqslant 0$, то отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos \pi t}{t^2-\frac{1}{4}}\right|dt \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k).$$

2. $\lambda(t) = \pi^2 - t^2$ на $[-\pi, \pi]$ и $\lambda(t) = 0$ вне $[-\pi, \pi]$. В этом случае $\forall F(z) \in L_\pi^1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\pi^2 F(x) + F''(x)|\,dx \leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\pi t\cos \pi t - \sin \pi t}{\pi t^3}\right|dt \sum_{k=-\infty}^{\infty}|F(k)|.$$

Отсюда в частности следует, что если $F(z) \in L_\pi^1$, то и $F^{(2n)}(z) \in L_\pi^1$.

3. $\lambda(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,d\rho(u)$ на $[-\pi, \pi]$ и $\lambda(t) = 0$ вне $[-\pi, \pi]$, где $\rho(u)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|d\rho(u)| < \infty.$$

В этом случае

$$\Lambda(F, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(u-x)}\,d\rho(u)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-it(x-u)}\,dt\,d\rho(u).$$

Отсюда

$$\Lambda(F, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-u)\, d\rho(u). \tag{6}$$

Теорема 2. *Если* $\Lambda(F)$ *оператор, определенный в (6), и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\ln(|u|+2)]\, |d\rho(u)| < \infty, \tag{7}$$

то $\Lambda(F) \in L(-\infty, \infty)\ \forall F \in L^1_\pi \Leftrightarrow \lambda(\pi) = \lambda(-\pi) = 0$, *т. е.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\pi u} d\rho(u) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(x-u)}{\pi(x-u)}\, d\rho(u) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi(x-u)}{\pi(x^2+1)}\, d\rho(u).$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin\pi(x-u)}{\pi}\left[\frac{1}{x-u} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{x}{x^2+1}\right]\right| |dx\, |d\rho(u)| \leqslant c \int_{-\infty}^{\infty} [\ln(|u|+2)]\, |d\rho(u)| < \infty$$

в силу (7). При этом использовано следующее простое неравенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin\pi(x-u)}{\pi}\left[\frac{1}{x-u} - \frac{x}{x^2+1}\right]\right| dx \leqslant c\ln(|u|+2),$$

где c — абсолютная константа. Таким образом,

$$\Lambda\left(\frac{\sin\pi z}{\pi z}, x\right) \in L \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi(x-u)}{\pi(x^2+1)}\, d\rho(u)\right| dx < \infty,$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi(x-u)}{\pi(x^2+1)}\, d\rho(u)\right| dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(a\sin\pi x + b\cos\pi x)\,x}{\pi(x^2+1)}\right| dx,$$

где $a = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\pi u\, d\rho(u)$; $b = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin\pi u\, d\rho(u)$. Поэтому

$$\Lambda\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z},\ x\right) \in L(-\infty,\ \infty) \leftrightarrow a = b = 0.$$

Очевидно, что условие $a = b = 0$ и (8) эквивалентны. Для завершения доказательства теоремы нужно воспользоваться замечанием 1 к теореме 1. Теорема доказана.

Заметим, что всякую функцию $F(z) \in L_\pi^1$ можно представить в виде

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (z-u)}{\pi (z-u)}\, d\rho_1(u) + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (z-u)}{\pi (z-u)}\, d\rho_2(u),$$

где $\rho_1(u)$ и $\rho_2(u)$ — вещественные кусочно-постоянные функции, имеющие в целых точках $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots$ скачки соответственно $\mathrm{Re}F(k)$ и $\mathrm{Im}F(k)$. Учитывая это, из теоремы 2 получаем

Следствие. Если $F(z) \in L_\pi^1$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)| \ln(|k|+2) < \infty$, то $F(x) \in L(-\infty,\ \infty) \leftrightarrow \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k F(k) = 0$.

Интересно отметить, что теорема 2 остается в силе и для класса L_π^2. Явление интерференции существует и на классе L_π^m при $m > 1$. Определим линейный оператор $\Lambda_m(F)$ на классе L_π^m. Пусть $\forall F(z) \in L_\pi^1$ $\Lambda_m(F) = \Lambda(F)$, где $\Lambda(F)$ — оператор, определенный в (3), и $\Lambda_m(P(z)\sin \pi z,\ x) \in L(-\infty,\ \infty)$. Здесь $P(z)$ — любой полином степени не больше $m-2$. Используя 1, получим для $F(z) \in L_\pi^m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda_m(F,\ x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda_m(P(z)\sin \pi z,\ x)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)| < \infty.$$

Если еще $\forall P(z)$ степени не больше $m-2$, $\Lambda_m(P(z)\sin \pi z,\ x) \equiv 0$, то так же, как в доказательстве теоремы 1, можно доказать, что константа $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t)|\, dt$ точная на классе L_π^m. Этим условиям удовлетворяет, например, оператор

$$\Lambda_m(F,\ z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-u)\, d\rho(u),$$

где $\rho(u)$ — вещественная функция, удовлетворяющая (7) и следующим соотношениям: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^k e^{\pm ixu} d\rho(u) = 0$, $k = 0;\ 1;\ 2; \ldots\ m-2$.

Можно рассматривать явление интерференции на более широком классе, а именно, на классе ц. ф. э. т. не большего π, представимых в виде (1):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} d\rho(u) \ (-\pi \leqslant t \leqslant \pi),$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(u)| < \infty$ или, эквивалентно,

$$F(z) = P(z) \sin \pi z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (z-u)}{\pi (z-u)} d\rho(u).$$

В этом случае $\Lambda(F, x) = \Lambda(P(z) \sin \pi z, x) + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\lambda}(x-u) d\rho(u)$, откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(F, x)| dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(P(z) \sin \pi z, x)| dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(u)|.$$

Следующее предложение является аналогом теоремы Б. Я. Левина для ц. ф. э. т. не большего π, ограниченных на вещественной оси [1, с. 112].

Теорема 3. *Для того чтобы существовала ц. ф. $F(z)$ э. т. не большего π, интегрируемая на вещественной прямой и принимающая в целых точках $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ значения $F(k) = c_k$, где c_k — заданная последовательность такая, что*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+n} c_{k+n} \frac{k}{k^2+1} \right| < \infty. \tag{11}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $F(z)$ — ц. ф. э. т. не большего π. $F(x) \in L(-\infty, \infty)$ и $F(k) = c_k$, где $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$.

Покажем, что имеет место неравенство (11). Так как $F(x) \in L(-\infty, \infty)$, то $F(x) = 0(1)$ при $|x| \to \infty$ [1, с. 110]. Значит, $F(z) \in L_\pi^1$ и, следовательно,

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k F(k)}{(z-k)}. \tag{12}$$

Отсюда

$$F(n+i)=\frac{\sin\pi(n+i)}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+n}c_{k+n}\left(\frac{k+i}{k^2+1}\right). \qquad (13)$$

Но

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{\sin\pi(n+i)}{\pi}\right|\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+n}c_{k+n}\frac{1}{k^2+1}\right|\right)<\infty.$$

Поэтому, учитывая еще, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F(n+i)|\leqslant\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|\,dx$$

[1, с. 107], из (13) получим (11). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено (11) и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|<\infty$. Введем функцию

$$F(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k c_k}{(z-k)}.$$

Для нее

$$\int_0^1|F(x+n+i)|\,dx=\int_0^1\left|\frac{\sin\pi(x+n+i)}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k c_k}{x+n+i-k}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^\pi}{\pi}\int_0^1\left|\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}}{x+i-k}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}}{i-k}\right]+\right.$$

$$+\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}}{i-k}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}k}{k^2+1}\right]+$$

$$\left.+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}k}{k^2+1}\right|dx\leqslant\frac{e^\pi}{\pi}\int_0^1\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}}{x-k+i}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}}{i-k}\right|dx+\frac{e^\pi}{\pi}\int_0^1\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}}{i-k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}k}{k^2+1}\right|dx+\frac{e^\pi}{\pi}\int_0^1\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}c_{k+n}k}{k^2+1}\right|dx=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Легко видеть, что существуют положительные константы a_1 и a_2:

$$I_1 \leqslant a_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{k+n}| \frac{1}{k^2+1}; \quad I_2 \leqslant a_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{k+n}| \frac{1}{k^2+1}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+i)|\,dx \leqslant (a_1+a_2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} +$$

$$+ \frac{e^{\pi}}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} c_{k+n} k}{k^2+1} \right| < \infty.$$

Осталось учесть, что из интегрируемости ц. ф. э. т. на вещественной прямой следует ее интегрируемость на любой параллельной ей прямой [1, с. 35]. Теорема 3 доказана.

Как видно из доказательства теоремы 3, она имеет следующую эквивалентную формулировку: если $F(z) \in L^1_{\pi}$, то $F(x) \in L(-\infty, \infty) \leftrightarrow \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |F(n+i)| < \infty$. Другие эквивалентные формулировки можно найти в теореме 1 [9].

§ 2. В этом параграфе доказана теорема о двусторонних оценках при приближении на всей вещественной оси функций из $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ целыми функциями экспоненциального типа (ц. ф. э. т.). Эта теорема является обобщением одной теоремы Б. Л. Голинского [7], соответствующей случаю $k=1$, $p=2$.

Пусть $f(t) \in L_p(-\infty, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.
Рассмотрим

$$Б_{\lambda, k}(f, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \Phi_{\lambda, k}(z-t)\,dt, \tag{14}$$

где

$$\Phi_{\lambda, k}(z) = \left(1 + \frac{1}{2^k} \Delta^k_{\frac{\pi}{\lambda}}\right) \frac{\sin \lambda z}{z}$$

— ц. ф. э. т. не большего λ, $\left(\Delta^k_h(f, x) = \sum\limits_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu+1} \binom{k}{\nu} f(x+\nu h)\right)$, иначе

$$\Phi_{\lambda, k}(t) = \frac{1}{2^k} \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} \frac{\nu \frac{\pi}{\lambda} \quad \sin \lambda t}{t\left(\nu \frac{\pi}{\lambda} - t\right)}. \tag{15}$$

Отсюда видно, что $\Phi_{\lambda, k}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Используя известное неравенство для свертки $\|f*\varphi\|_p \leqslant \|f\|_p \|\varphi\|_1$, из (14) получим

$$\| Б_{\lambda, k}(f, x)\|_p \leqslant a_k \|f\|_p, \tag{16}$$

где $a_k = \|\Phi_{\lambda, k}\|_1$ зависит только от k. Из неравенства Бернштейна (см., например, [4, с. 190]) следует, что ц. ф. э. т. $\Phi'_{\lambda, k}(z)$ интегрируема на вещественной прямой, а значит, и на любой параллельной прямой [1, с. 35]. Поэтому $Б_{\lambda, k}(f, z)$ в каждой точке комплексной плоскости имеет непрерывную производную:

$$Б'_{\lambda, k}(f, z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \Phi'_{\lambda, k}(z-t)\, dt.$$

Следовательно, $Б_{\lambda, k}(f, z)$ — ц. ф. э. т. не большего λ.

Если $1 \leqslant p < \infty$, то тому же классу принадлежит функция

$$S_\lambda(f, z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(z-t)}{(z-t)}\, dt. \tag{17}$$

В этом случае

$$Б_{\lambda, k}(f, z) = S_\lambda(f, z) + \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu+1} S_\lambda\left(f, \ z+\nu\frac{\pi}{\lambda}\right). \tag{18}$$

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *тогда существуют положительные константы* c_1 *и* c_2, *зависящие только от* k, *такие что*

$$c_1 \omega_k\left(f, \frac{\pi}{\lambda}\right)_p \leqslant \|f - Б_{\lambda, k}(f)\|_p \leqslant c_2 \omega_k\left(f, \frac{\pi}{\lambda}\right)_p,$$

где $\omega_k(f, \delta)_p = \sup\limits_{|t| \leqslant \delta}\|\Delta_t^k(f, x)\|_p$.

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Если* $\Phi(z)$ — *ц. ф. э. т. не большего* λ *и* $\Phi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *то*

$$Б_{\lambda, k}(\Phi, x) = \Phi(x) + \frac{1}{2^k}\Delta^k_{\pi/\lambda}(\Phi, x). \tag{19}$$

Доказательство леммы. При $p = 1$ утверждение леммы следует из формулы обращения преобразования Фурье. Действительно,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{i(x-t)y}\, dy\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)\, e^{-ity}dt\right)e^{ixy}dy = \Phi(x),$$

т. е. $S_\lambda(\Phi, x) = \Phi(x)$. Отсюда, учитывая (18), получим (19).

Пусть $\lambda > \sigma$, где σ — тип ц. ф. э. т.; $\Phi(z)$: $\Phi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ и $\lambda > \sigma + 2\varepsilon$, тогда ц. ф. э. т. не большего $\sigma + 2\varepsilon$

$$\Phi_\varepsilon(x) = \Phi(x)\left(\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}\right)^2 \in L_1(-\infty, \infty).$$

Подставляя $\Phi_\varepsilon(x)$ в (19), используя (14) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\,\Phi_{\lambda,k}(x-t)\,dt = \Phi(x) + \frac{1}{2^k}\Delta^k_{\pi/\lambda}(\Phi, x).$$

Переходя теперь к пределу при $\lambda \to \sigma$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\,\Phi_{\sigma,k}(x-t)\,dt = \Phi(x) + \frac{1}{2^k}\Delta^k_{\pi/\sigma}(\Phi, x).$$

А это и есть, с учетом (14), (19) при $\lambda = \sigma$. Лемма доказана. Отметим, что при $1 \leqslant p < \infty$ $S_\lambda(F, x) = F(x)$.

Доказательство теоремы.

Пусть $f(t) \in L_p(-\infty, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, обозначим $E_\lambda(f) = \inf \|f - g_\lambda\|_p$, где g_λ ц. ф. э. т. не большего λ и $g_\lambda(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, а инфимум берется по всем таким g_λ. Пусть $P_\lambda(f, x) = P_\lambda(x)$: $E_\lambda(f) = \|f - P_\lambda\|_p$. Поэтому, например,

$$E_\lambda(f) = \|f - P_\lambda\|_p \leqslant \|f - g_\lambda\|_p. \tag{20}$$

Применяя лемму, (16) и очевидное неравенство $\|\Delta^k_\delta \varphi\| \leqslant 2^k \|\varphi\|$, имеем

$$\left\|f - Б_{\lambda,k}(f) + \frac{1}{2^k}\Delta^k_{\pi/\lambda}(f)\right\|_p = \left\|f - Б_{\lambda,k}(f) + \frac{1}{2^k}\Delta^k_{\pi/\lambda}(f) -\right.$$

$$\left. - P_\lambda(f) - \frac{1}{2^k}\Delta^k_{\pi/\lambda}(P_\lambda) + Б_{\lambda,k}(P_\lambda)\right\|_p \leqslant \|f - P_p\|_p +$$

$$+ \|Б_{\lambda,k}(P_\lambda - f)\|_p + \frac{1}{2^k}\|\Delta^k_{\pi/\lambda}(P_\lambda - f)\|_p \leqslant (2 + a_k)\,E_\lambda(f). \tag{21}$$

Отсюда и из обобщенной теоремы Джексона $E_\lambda(f) \leqslant \tilde{a}_k \omega_k\left(f, \frac{\pi}{\lambda}\right)_p$ [см., например, 2, с. 274] получим

$$\|f - Б_{\lambda,k}(f)\|_p \leqslant \tilde{a}_k(2 + a_k)\,\omega_k\left(f, \frac{\pi}{\lambda}\right)_p +$$

$$+ \frac{1}{2^k}\|\Delta^k_{\pi/\lambda}(f)\|_p \leqslant \left[a_k(2 + a_k) + \frac{1}{2^k}\right]\omega_k\left(f, \frac{\pi}{\lambda}\right)_p. \tag{22}$$

С другой стороны, из (21) и (20) следует

$$\|\Delta^k_{\pi/\lambda}(f)\|_p \leqslant 2^k \|f - Б_{\lambda,k}(f)\|_p + 2^k(2 + a_k)\,E_\lambda(f) \leqslant$$

$$\leqslant 2^k(3 + a_k)\,\|f - Б_{\lambda,k}(f)\|_p. \tag{23}$$

Пусть теперь $0 < h \leqslant \frac{\pi}{\lambda} < 1$. Учитывая, что

$$\| \Delta_h^k (P_\lambda) \|_p \leqslant \| P_\lambda^{(k)} \|_p h^k \leqslant \| P_\lambda^{(k)} \|_p (\pi/\lambda)^k,$$

имеем

$$\| \Delta_h^k (f) \|_p = \| \Delta_h^k (f - P_\lambda) + \Delta_h^k (P_\lambda) \|_p \leqslant 2^k E_\lambda (f) + \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^k \| P_\lambda^{(k)} \|_p. \quad (24)$$

Воспользуемся следующим свойством целых функций:

$$\| P_\lambda^{(k)} \|_p \leqslant \left(\frac{\lambda}{\sin \lambda h}\right)^k \| \Delta_{\pi/\lambda}^k (P_\lambda) \|_p$$

[2, с. 232]. Тогда из (24) следует

$$\| \Delta_h^k (f) \|_p \leqslant 2^k E_\lambda (f) + \| \Delta_{\pi/\lambda}^k (P_\lambda) \|_p.$$

Используя еще неравенство

$$\| \Delta_{\pi/\lambda}^k (P_\lambda) \|_p \leqslant 2^k E_\lambda (f) + \| \Delta_{\pi/\lambda}^k (f) \|_p,$$

из (23) имеем

$$\| \Delta_h^k (f) \|_p \leqslant 2 \cdot 2^k E_\lambda (f) + 2^k (2 + a_k) \| f - Б_{\lambda,k} (f) \|_p \leqslant$$
$$\leqslant 2^k (4 + a_k) \| f - Б_{\lambda,k} (f) \|_p.$$

Отсюда

$$\omega_k \left(f, \frac{\pi}{\lambda}\right)_p \leqslant 2^k (4 + a_k) \| f - Б_{\lambda,k} (f) \|_p. \quad (25)$$

Из (25) и (22) следует теорема 4.

Следствие: а) для того чтобы $f(t)$ имела абсолютно непрерывную на всей оси $(k-1)$ производную и

$$\| f^{(k)} \|_p < \infty \quad (1 < p \leqslant \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\| f - Б_{\lambda,k} (f) \|_p = 0 \left(\frac{1}{\lambda^k}\right);$$

б) для того чтобы интегрируемая на оси $f^{(k-1)}$ имела ограниченную вариацию на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы $\| f - Б_{\lambda,k} \|_1 = O(1/\lambda^k)$.

Список литературы: 1. *Левин Б. Я.* Целые функции (Курс лекций). М., Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971. 124 с. 2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960. 624 с. 3. *Boas R. P., Gr.* Interference phenomena for entire functions.— Mich. Math. Journal, 1955—56, vol. 3, p. 123—132. 4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., Наука, 1965. 408 с. 5. *Левин Б. Я., Динь Тхань Хоа.* Об интерференционных операторах над целыми функциями экспоненциального типа.— Функциональный анализ и его приложения, 1969, т. 3, вып. 1, с. 48—61. 6. *Тригуб Р. М.* Конструктивная характеристика некоторых классов функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 3, с. 615—630. 7. *Голинский Б. Л.* О приближении на всей числовой оси двух сопряженных по М. Риссу функций с помощью интегральных операторов особого вида.— Мат. сб., 1965, т. 66, вып. 1, с. 3—34.

8. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз. 1963. 256 с. 9. *Тригуб Р. М.* Интегрируемость преобразования Фурье финитной функции.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, 1975, вып. 23, с. 124—131.

Поступила 21 сентября 1976 г.