УДК 513.88

Ю. С. БАРКОВСКИЙ

О ВПОЛНЕ ПРАВИЛЬНЫХ КРОСС-НОРМАХ

Кросс-норма, определенная на алгебраическом тензорном произведении банаховых пространств, называется вполне правильной, если относительно этой нормы $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ для любых ограниченных операторов A и B. В заметке показано, что всякая вполне правильная кросс-норма мажорирует «минимальную» кросс-норму ε. Показано также, что кросс-норма, относительно которой $\|A \otimes B\| < \infty$ при $\|A\| < \infty$, $\|B\| < \infty$, эквивалентна некоторой вполне правильной кросс-норме.

1. Определения. *Пусть X и Y — банаховы пространства, $X \otimes Y$ — их алгебраическое тензорное произведение. Вводя в $X \otimes Y$ кросс-норму α, получаем линейное нормированное пространство $X \underset{\alpha}{\otimes} Y$. Его пополнение обозначается $X \underset{\alpha}{\hat{\otimes}} Y$ и называется (α-) тензорным произведением пространств X, Y.*

Пусть $A : X \to X$, $B : Y \to Y$ — линейные операторы. Их тензорным произведением называется оператор $A \otimes B : X \otimes Y \to X \otimes Y$, $A \otimes B : \sum x_k \otimes y_k \mapsto \sum A x_k \otimes B y_k$.

Через $L(X)$ обозначается пространство всех ограниченных линейных операторов в X. В $X \otimes Y$ вводятся кросс-нормы

$$\| \sum x_k \otimes y_k \|_\varepsilon = \sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ \psi \in Y^*}} \frac{| \sum \varphi(x_k) \psi(y_k) |}{\| \varphi \| \| \psi \|},$$

$$\| \sum x_k \otimes y_k \|_\pi = \inf \left\{ \sum \| u_i \| \| v_i \| : \sum u_i \otimes v_i = \sum x_k \otimes y_k \right\}.$$

Кросс-норма π — максимальная, она мажорирует всякую кросс-норму. Кросс-норма ε является минимальной в классе таких кросс-норм, сопряженные к которым в $X^* \otimes Y^*$ также являются кросс-нормами [1].

Кросс-норма α называется правильной, если $A \in L(X)$, $B \in L(Y) \Rightarrow$ $\Rightarrow A \otimes B \in L(X \underset{\alpha}{\otimes} Y)$. Правильная кросс-норма называется вполне правильной, если $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$, $\forall A \in L(X)$, $B \in L(Y)$. Заметим, что $\|A \otimes B\| \geqslant \|A\| \|B\|$. Действительно,

$$\|A \otimes B\| \geqslant \sup \frac{\|(A \otimes B)(x \otimes y)\|}{\|x \otimes y\|} = \|A\| \|B\|.$$

Кросс-нормы ε и π вполне правильны. В [3] рассмотрены некоторые кросс-нормы, которые не являются вполне правильными.

2. *Отображение T.* Рассмотрим в $X \otimes Y$ функционал $T\alpha = \| \cdot \|_{T\alpha}$:

$$\| u \|_{T\alpha} = \sup \left\{ \frac{\| (A \otimes B) u \|_\alpha}{\| A \| \| B \|} : A \in L(X), \ B \in L(Y) \right\}.$$

Легко проверяется, что $T\alpha$ — кросс-норма и для всякого $u \in X \otimes Y$, $\| u \|_{T\alpha} \geqslant \| u \|_\alpha$. Более того, справедлива

Теорема 1. *Отображение T является идемпотентом множества всех кросс-норм на множество вполне правильных кросс-норм.*

Доказательство. Легко видеть, что α вполне правильна тогда и только тогда, когда $\alpha = T\alpha$. Далее, для любой кросс-нормы α:

$$\frac{\| (A \otimes B) \ u \|_{T\alpha}}{\| A \| \| B \|} = \sup_{P, \ Q} \frac{\| (P \otimes Q) \ (A \otimes B) \ u \|_\alpha}{\| P \| \| A \| \| Q \| \| B \|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{P, \ Q} \frac{\| (PA \otimes QB) \ u \|_\alpha}{\| PA \| \| QB \|} \leqslant \| u \|_{T\alpha}.$$

Отсюда $\| u \|_{T(T\alpha)} \leqslant \| u \|_{T\alpha}$ и, значит, $T(T\alpha) = T\alpha$.

Рассмотрим некоторые следствия.

1. Кросс-норма $T\alpha$ минимальна в классе всех вполне правильных кросс-норм, мажорирующих α.

В самом деле, если $\alpha \leqslant \gamma$ и γ вполне правильна, то, очевидно, $T\alpha \leqslant T\gamma$, а по теореме 1 $T\gamma = \gamma$.

2. Кросс-норма ε минимальна в классе вполне правильных кросс-норм.

Действительно, достаточно показать, что $T\alpha \geqslant \varepsilon$ для любой кросс-нормы α. Это так, поскольку $\| u \|_\varepsilon$ — не что иное, как $\sup \{ \| A \|^{-1} \| B \|^{-1} \| (A \otimes B) u \|_\alpha \}$ по всем одномерным $A \in L(X)$, $B \in L(Y)$. Следовательно, если α вполне правильна, то $\alpha \geqslant \varepsilon$. В некоторых работах (см. например, [4]) эти два свойства кросс-нормы рассматриваются как независимые.

3. Правильные кросс-нормы.

Теорема 2. *Кросс-норма α правильна тогда и только тогда, когда она эквивалентна $T\alpha$, т. е. вполне правильной кросс-норме.*

Доказательство. Достаточность, конечно, тривиальна. Докажем необходимость. Пусть α — правильная кросс-норма. Рассмотрим множество $L_\otimes(X) = \{ A \otimes I : A \in L(X) \}$. Так как α правильна, то $L_\otimes(X)$ — линейное многообразие в $L(X \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} Y)$. Покажем, что $L_\otimes(X)$ замкнуто. Пусть $A_n \otimes I \to \hat{A}$, $\hat{A} \in L(X \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} Y)$. В силу оценки $\| A \| \leqslant \| A \otimes I \|$, фундаментальна и сходится в $L(X)$ последовательность $\{A_n\}$: $A_n \to A_0$. Для произвольного $u \in X \otimes Y$, $u = \sum x_k \otimes y_k$ имеем $\| (A_n \otimes I - A_0 \otimes I) u \|_\alpha \leqslant \leqslant \sum_k \| (A_n - A \ ) x_k \| \| y_k \| \to 0$ $(n \to \infty)$. Следовательно, $\hat{A} u = (A_0 \otimes I) u$. Так как $X \otimes Y$ плотно в $\hat{X \underset{\alpha}{\otimes} Y}$, то $\hat{A} = A_0 \otimes I$.

Банаховы пространства $L(X)$ и $L_{\otimes}(X)$ естественным образом отождествляются и, по теореме Банаха, действующие в них нормы эквивалентны: $\| A \otimes I \| \leqslant C_1 \| A \|$. Аналогично получаем: $\| I \otimes B \| \leqslant C_2 \| B \|$, $\| A \otimes B \| \leqslant \| A \otimes I \| \ \| I \otimes B \| \leqslant C_1 C_2 \| A \| \ \| B \|$. Окончательно:

$$\| u \|_{T\alpha} = \sup_{A,\, B} \frac{\| (A \otimes B)\, u \|_\alpha}{\| A \| \| B \|} \leqslant C \| u \|_\alpha \ (C = C_1 C_2).$$

Теорема доказана.

Список литературы: **1.** *Shatten R.* A theory of cross-spaces. Princeton, 1950. **2.** *Дей М. М.* Нормированные линейные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1961. **3.** *Okayasu T.* Some cross-norms which are not uniformly cross.— Proc. Jap. Acad., 1970, vol. 46, No 1, p. 54-57. **4.** *Ichinose T.* On the spectra of tensor products of linear operators in Banach spaces.— J. reine und agnew. Math., 1970, Bd 244, S. 119-153.

Поступила 16 января 1973 г.