УДК 518.517.948:32

Н. Я. ТИХОНЕНКО

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СДВИГОМ

Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат, разделяющая комплексную плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Найти неизвестные функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ (или только $F^+(z)$), аналитические соответственно в областях D^+ и D^- по одному из следующих краевых условий:

$$F^+[\alpha(t)] = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in L; \tag{1}$$

$$F^+[\alpha(t)] = G(t)F^+(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{2}$$

Здесь $F^\pm(t)$ — краевые значения функций $F^\pm(z)$ соответственно, а $\alpha(t)$ — сдвиг, переводящий взаимнооднозначно контур L самого в себя: в случае задачи (1) с сохранением, а в случае задачи (2) с изменением направления обхода по контуру L на противоположное. Кроме того, $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in L$ и в случае задачи (2) удовлетворяет условию Карлемана $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$. Будем считать, что $G(t) \neq 0$ $\forall t \in L$ и $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t) \in H_\lambda$, $0 < \lambda \leqslant 1$.

Отметим [1—3], что к задачам (1), (2) сводится достаточно широкий круг прикладных задач. Как известно [4—7], построение решений задач (1), (2) сводится к двукратному последовательному решению интегрального уравнения

$$K\varphi \equiv \varphi(t) + (M\varphi)(t) = \omega(t), \quad t \in L \tag{3}$$

с различными правыми частями $\omega(t)$.

Здесь $0 \leqslant \nu < 1$, а

$$M\varphi \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{k(t, \tau)}{|\tau - t|^\nu}\varphi(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

и функция $k(t, \tau)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем γ, по обеим переменным. Тогда [6] уравнение (3) имеет решение в пространстве H_α, где $\alpha = \min\{\lambda, \gamma, \nu\}$. Решение задач (1), (2) также принадлежит пространству H_α. Если $\nu = 0$, то $\alpha = \min\{\mu, \gamma\}$.

В настоящей работе посредством приближенного решения уравнения (3) методами коллокаций, механических квадратур и редукции строятся приближенные решения задач (1), (2) и устанавливается их скорость сходимости в пространстве H_β, $0 \leqslant \beta < \alpha^*$, к точным решениям этих задач. Отметим, что в работе [8] обосновывается сходимость метода механических квадратур приближенного решения уравнения (3) при $\beta < \nu = \mu = \gamma$. Работа [9] посвящена приближенному решению задачи (1) методом механических квадратур, однако оценки скорости сходимости приближенного решения задачи (1) к ее точному решению занижены. Ниже всегда будем обозначать $\varkappa = \operatorname{ind} G(t)$.

1. Вспомогательные предложения

Лемма 1. *Оператор* (4) *действует из пространства C в пространство H_β, $\beta \leqslant \min\{\nu, \gamma\}$. При этом*

$$\|M\| \leqslant \frac{1}{2^\nu \pi} B\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{1}{2}\right)\left\{1 + 2^{2-\nu-\beta} B\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{1}{2}\right)\left[(\pi^\nu + 2^{\nu+\gamma}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times B\left(\frac{1+\nu}{2};\ \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^{1+\nu}}{2(1+\nu)}\right]\right\} \|k(t,\ \tau)\|_{H_\gamma}. \qquad (1.1)$$

Доказательство этой леммы следует из определения нормы в пространстве H_β и следующих оценок:

$$\int\limits_L \frac{|d\tau|}{|\tau - t|^\nu} \leqslant 2^{1-\nu} B\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{1}{2}\right);$$

$$\int\limits_L |\tau - t|^\nu |d\tau| \leqslant 2^{1+\nu} B\left(\frac{1+\nu}{2};\ \frac{1}{2}\right);$$

$$\int\limits_L \| \tau - t_1|^\nu - |\tau - t_2|^\nu \| d\tau| \leqslant 2^{1-\nu}\pi^\nu \left\{\frac{\pi}{2(1+\nu)} + B \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1+\nu}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\} |t_1 - t_2|^\nu,$$

где $B(p,\ q)$ — бетта-функция.

Следствие. *Оператор* (4) *действует из H_β в H_β с нормой* (1.1).

Пусть P_n — проектор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in H_\beta$ ее интерполяционный многочлен

$$(P_n\varphi)(t) = \varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k,\ a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \varphi(t_j)\, t_j^{-k},$$

$$k = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n \qquad (1.2)$$

по узлам

$$t_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j}, \quad j = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n. \qquad (1.3)$$

* Если $\beta = 0$, то H_β совпадает с пространством C непрерывных функций.

Через S_n обозначим проектор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in H_\beta$ отрезок ее ряда Фурье

$$(S_n\varphi)(t) = \varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k t^k, \tag{1.4}$$

где φ_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$. Тогда на основании работ [10; 11] справедлива

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t) \in H_\alpha$, тогда, если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то*

$$\| \varphi(t) - (P_n\varphi)(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_1 \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \| \varphi(t) \|_{H_\alpha}; \tag{1.5}$$

$$\| \varphi(t) - (S_n\varphi)(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_2 \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \| \varphi(t) \|_{H_\alpha}. \tag{1.6}$$

Здесь и ниже γ_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n.

2. Задача Газемана

Как известно [4—7], уравнение (3), соответствующее задаче (1), имеет ядро следующего вида:

$$\frac{k(t, \tau)}{|\tau - t|^\nu} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}. \tag{2.1}$$

Тогда в случае $\varkappa \geqslant 0$ решение задачи (1), имеющее на бесконечности порядок m, строится по формулам

$$F^+(t) = \left\{\frac{1}{2}\rho[\beta(t)] + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(\tau)]}{\tau - t} d\tau\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\varphi[\beta(t)] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(\tau)]}{\tau - t} d\tau\right\}; \tag{2.2}$$

$$F^-(t) = t^{-\varkappa}\left\{-\frac{1}{2}\rho(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(\tau)}{\tau - t} d\tau + P_{m+\varkappa}(t)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau\right\}. \tag{2.3}$$

Здесь $P_{m+\varkappa}(t)$ — произвольный многочлен степени $m + \varkappa$*; $\varphi(t)$ и $\rho(t)$ — решения уравнения (3) с правыми частями соответственно

$$\omega(t) = \ln[t^{-\varkappa} G(t)]; \tag{2.4}$$

$$\omega(t) = P_{m+\varkappa}(t) + g(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau\right\}, \tag{2.5}$$

а $\beta(t)$ — сдвиг, обратный $\alpha(t)$, т. е. $\beta[\alpha(t)] \equiv t$. Если же $\varkappa < 0$, то решения задачи (1) строятся по формулам (2.2) и (2.3), но

* Если разыскиваются решения задачи (1), исчезающие на бесконечности, то необходимо брать многочлен степени не выше $\varkappa - 1$.

$P_{m+\varkappa}(t) \equiv 0$, а функция $g(t)$ должна удовлетворять вполне определенным условиям разрешимости, которые считаем выполненными.

А. Метод коллокации. Приближенное решение $\varphi_n(t)$ уравнения (3) с правой частью (2.4) ищем в виде (1.2). Подставляя (1.2) в (3) и приравнивая значения правой и левой части в узлах (1.3), получим систему уравнений для определения a_k

$$\sum_{k=-n}^{n} A_{jk} a_k = \ln\left[t_j^{-\varkappa} G(t_j)\right], \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{2.6}$$

$$\text{где } A_{jk} = t_j^k + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{k(t_j, \tau)}{|\tau - t_j|^\nu} \tau^k d\tau, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n. \tag{2.7}$$

Согласно общей теории приближенных методов [12—15], для разрешимости системы (2.6) достаточно показать выполнимость условия

$$\| K\varphi_n - P_n K\varphi_n \|_{H_\beta} \leqslant \varepsilon \| \varphi_n(t) \|_{H_\alpha}. \tag{2.8}$$

Легко видеть, что в силу оценок (1.1) и (1.4) условие (2.8) выполняется при $\varepsilon = \gamma_3 n^{\beta-\alpha} \ln n$. Тогда согласно теоремы 7 работы [13] система (2.6) разрешима при n, удовлетворяющих условию

$$\gamma_4 n^{\beta-\alpha} \ln n < 1, \tag{2.9}$$

а приближенное решение $\varphi_n(t)$ уравнения (3) с правой частью (2.4) стремится в пространстве H_β со скоростью

$$\| \varphi(t) - \varphi_n(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_5 n^{\beta-\alpha} \ln n. \tag{2.10}$$

Но для построения приближенного решения задачи (1), соответствующего некоторому ее зафиксированному решению, необходимо также решить уравнение (3) с правой частью

$$\omega_n(t) = P_{m+\varkappa}(t) + g(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}\varphi_n(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi_n(\tau)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\, d\tau\right\}, \tag{2.11}$$

которая в пространстве H_β стремится к выражению (2.5) со скоростью

$$\| \omega(t) - \omega_n(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_6 n^{\beta-\alpha} \ln n. \tag{2.12}$$

Приближенное решение уравнения (3) с правой частью (2.11) ищем в виде

$$\rho_n(t) = (P_n \rho)(t) = \sum_{k=-n}^{n} b_k t^k, \tag{2.13}$$

при этом неизвестные b_k определяем из системы

$$\sum_{k=-n}^{n} A_{jk} b_k = \omega_n(t_j), \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{2.14}$$

где A_{jk} определяются по формулам (2.7).

Совершенно очевидно, что система (2.14) одновременно разрешима с системой (2.6). При этом приближенное решение уравнения (3) с правой частью (2.11) в силу (2.12) и теоремы 7 работы [13], стремится в пространстве H_β к его точному решению со скоростью

$$\| \rho(t) - \rho_n(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_7 n^{\beta-\alpha} \ln n. \tag{2.15}$$

Подставляя найденные $\varphi_n(t)$ и $\rho_n(t)$ в формулы (2.2) и (2.3), находим приближенное решение $F_n^\pm(t)$ задачи (1), соответствующее некоторым значениям коэффициентов многочлена $P_{m+\varkappa}(t)$, при этом в выражении (2.3) многочлен $P_{m+\varkappa}(t)$ необходимо брать с теми же коэффициентами. На основании оценок (2.10) и (2.15) можно заключить, что скорость стремления в пространстве H_β приближенного решения задачи (1) к ее точному решению определяется неравенствами

$$\| F^\pm(t) - F_n^\pm(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_8^\pm n^{\beta-\alpha} \ln n. \tag{2.16}$$

Теорема 1. *Если* $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in L$ *и* $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\lambda$, *и если* $\alpha(t)$ *не изменяет ориентацию контура* L, *то в случае разрешимости задачи* (1) *системы* (2.6) *и* (2.14) *разрешимы при всех* n, *удовлетворяющих условию* (2.9), *а приближенное решение* $F_n^\pm(t)$ *задачи* (1) *стремится в пространстве* H_β *к ее точному решению* $F^\pm(t)$ *со скоростью выражения* (2.16).

Теорема 2. *Если* $G(t)$, $g(t)$ *и* $\alpha(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и если* $g^{(r)}(t)$, $G^{(r)}(t)$, $\alpha^{(r+1)}(t) \in H_\lambda$, *то системы* (2.6) *и* (2.14) *разрешимы при всех* n, *удовлетворяющих условию* $\gamma_9 n^{\beta-r-\alpha} \times \ln n < 1$, *а приближенное решение* $F_n^\pm(t)$ *задачи* (1) *стремится в пространстве* H_β *к ее точному решению* $F^\pm(t)$ *со скоростью*

$$\| F^\pm(t) - F_n^\pm(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_{10}^\pm n^{\beta-r-\alpha} \ln n.$$

Б. Метод механических квадратур. Приближенное решение уравнения (3) с правой частью (2.4) ищем в виде (1.2). Ввиду сложности вычисления квадратур (2.7) заменяем их по какой-либо из формул приближенного интегрирования. В частности, если мы воспользуемся формулой прямоугольников по узлам

$$t_{j+\frac{1}{2}} = e^{\frac{2\pi i}{2n+1}\left(j+\frac{1}{2}\right)}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{2.17}$$

то неизвестные a_k определяем из системы (2.6), но в ней

$$A_{jk} = t_j^k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=-n}^{n} \frac{k\left(t_j, t_{s+\frac{1}{2}}\right)}{\left| t_{s+\frac{1}{2}} - t_j \right|^\nu} t_{s+\frac{1}{2}}^k \Delta t_{s+\frac{1}{2}}, \tag{2.18}$$

$$k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

где $\Delta t_{s+\frac{1}{2}} = t_{s+\frac{3}{2}} - t_{s+\frac{1}{2}}$. Если же воспользоваться формулой прямоугольников по узлам (1.3), то

$$A_{jk} = t_j^k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=-n}^{n}{}' \frac{k(t_j,\ t_s)}{|t_s - t_j|^\nu} t_s^k \Delta t_s,\ k = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n, \quad (2.19)$$

где Σ' означает суммирование по $s \neq j$, а $\Delta t_s = t_{s+1} - t_s$.

Разрешимость системы (2.6) с коэффициентами (2.18) или (2.19) следует из выполнимости условия (2.8) и условия

$$\| \widetilde{K}\varphi_n - P_n K\varphi_n \|_{H_\beta} \leqslant \varepsilon_1 \| \varphi_n(t) \|_{H_\alpha}, \quad (2.20)$$

где $\widetilde{K}\varphi_n \equiv \varphi_n(t) + \left\{ P_n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \left[P_{n\tau} \frac{k(t,\ \tau)}{|\tau - t|^\nu} \varphi_n(\tau) \right](\tau)\, d\tau \right\}(t)$. Здесь $P_{n\tau}$ — оператор проектирования пространства H_β на пространство интерполяционных многочленов с узлами интерполяции (2.17), [или (1.3)] по переменной τ. На основании оценок лемм 1 и 2 можно сделать заключение, что условие (2.20) выполняется при $\varepsilon_1 = \gamma_{11} n^{\beta-\alpha} \ln n$. Тогда на основании теоремы 6 работы [13] система (2.6) с коэффициентами (2.18) [или (2.19)] разрешима при всех n, удовлетворяющих неравенству $\gamma_{12} n^{\beta-\alpha} \ln n < 1$, а $\| \varphi(t) - \varphi_n(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_{13} n^{\beta-\alpha} \ln n$.

Приближенное решение уравнения (3) с правой частью (2.11) ищем в виде (2.13), определяя при этом коэффициенты b_k из системы (2.6) с коэффициентами (2.18) или (2.19). Подставляя найденные $\varphi_n(t)$ и $\rho_n(t)$ в формулы (2.2) и (2.3), находим приближенное решение задачи (1). В данном случае теоремы 1 и 2 сохраняют свою силу.

В. Метод редукции. Приближенное решение уравнения (3) с правой частью (2.4) ищем в виде (1.4), определяя при этом коэффициенты φ_k из системы

$$\varphi_j + \sum_{k=-n}^{n} B_{kj} \varphi_k = d_j, \quad j = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n, \quad (2.21)$$

где d_j и B_{kj} — коэффициенты Фурье соответственно функций (2.4) и $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{k(t,\ \tau)}{|\tau - t|^\nu} \tau^k d\tau$, $k = 0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n$. Для разрешимости системы (2.21) достаточно доказать выполнимость условия $\| K\varphi_n - S_n K\varphi_n \|_{H_\beta} \leqslant \varepsilon \| \varphi_n(t) \|_{H_\alpha}$, которое доказывается по аналогии с условием (2.8), при этом система (2.21) будет разрешима при всех n, удовлетворяющих условию $\gamma_{14} n^{\beta-\alpha} \ln n < 1$, а $\| \varphi(t) - \varphi_n(t) \|_{H_\beta} \leqslant \gamma_{15} n^{\beta-\alpha} \ln n$. Для окончательного построения приближенного решения задачи (1) необходимо решить уравнение (3) с правой частью (2.11). Пусть c_j — коэффициенты Фурье функции

(2.11), а ρ_k — коэффициенты Фурье решения уравнения (3) с правой частью (2.11). Тогда для определения ρ_k получим систему уравнений

$$\rho_j + \sum_{k=-n}^{n} B_{kj}\rho_k = c_j, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{2.22}$$

определитель которой совпадает с определителем системы (2.21). Подставляя найденные $\varphi_n(t)$ и $\rho_n(t)$ в формулы (2.2) и (2.3), находим приближенное решение задачи (1), соответствующее вполне определенным значениям коэффициентов многочлена $P_{m+\varkappa}(t)$. При этом можно сформулировать теоремы, подобные теоремам 1 и 2.

3. Задача Карлемана

При построении приближенных решений задачи (2) укажем только формулы, по которым строятся решения задачи (2) и некоторые изменения в вычислительных схемах вышеуказанных методов, которые следуют из специфики задачи (2).

Для разрешимости задачи (2), ядро уравнения (3) которой имеет вид (2.1), необходимо предположить, что функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям

$$G(t)\,G[\alpha(t)] \equiv 1; \quad g(t) + G(t)\,g[\alpha(t)] \equiv 0. \tag{3.1}$$

Считаем, что они выполнены. Как известно [4], в теории задачи (2) важное значение играют корни $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$ уравнения $\alpha(t) = t$, т. е. так называемые неподвижные точки сдвига $\alpha(t)$. Так как $\alpha(t)$ удовлетворяет условию Карлемана, то из первого условия (3.1) следует $G(\hat{t}_j) = \pm 1$, $j = 1, 2$. Если $\varkappa$ четно, то $G(\hat{t}_1) = G(\hat{t}_2) = \pm 1$, если же $\varkappa$ нечетно, то $G(\hat{t}_1) = -G(\hat{t}_2) = \pm 1$. В этом случае, если $G(t) = -1$ в какой-либо из неподвижных точек, то в этой точке решение задачи (2) обращается в ноль. Пусть $\varkappa' = \frac{\varkappa}{2}$, если $\varkappa$ четно, и $\varkappa' = \frac{\varkappa + 1}{2}$, если $\varkappa$ нечетно. Тогда, если $\varkappa' \leqslant 0$, то решение задачи (2) строится по формуле

$$F^+(t) = \chi^+(t)\left\{C + R_{\varkappa'}(t) + \frac{1}{2}\rho(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\rho(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right\}. \tag{3.2}$$

Здесь C — произвольная постоянная, равная нулю, если $\lambda = -1$; $\lambda = -1$, если $G(t) = -1$ в обеих неподвижных точках, и $\lambda = 1$ в остальных случаях: $R_{\varkappa'}(t) = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \ldots + \frac{c_{\varkappa'}}{t^{-\varkappa'}}$, где c_i — произвольные постоянные

$$\chi^+(t) = t^{-\varkappa'} \exp\left\{\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right\}, \tag{3.3}$$

если $\varkappa$ четно, и

$$\chi^+(t) = (t - t_0)\, t^{-\varkappa'} \exp\left\{\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right\}, \qquad (3.4)$$

если $\varkappa$ нечетно. Здесь t_0 — неподвижная точка такая, что $G(t_0) = -1$, а $\varphi(t)$ — решение уравнения (3) с правой частью

$$\omega(t) = -\ln\left[\lambda t^{-\varkappa'} \alpha^{\varkappa'}(t)\, G(t)\right], \qquad (3.5)$$

если $\varkappa$ четно, и

$$\omega(t) = -\ln\left[\frac{t - t_0}{\alpha(t) - t_0}\, t^{-\varkappa'} \alpha^{\varkappa'}(t)\, G(t)\right], \qquad (3.6)$$

если $\varkappa$ нечетно; $\rho(t)$ — решение уравнения (3) с правой частью

$$\omega(t) = \lambda \frac{g[\alpha(t)]}{\chi^+(t)} + \lambda R_{\varkappa'}[\alpha(t)] - R_{\varkappa'}(t). \qquad (3.7)$$

Если же $\varkappa' > 0$, то $C \equiv 0$, $R_{\varkappa'}(t) \equiv 0$, а функция $g(t)$ должна удовлетворять дополнительным условиям разрешимости, которые считаем выполненными.

А. Метод коллокации. Приближенное решение уравнения (3) с правой частью (3.5) или (3.6) ищем в виде (1.2). Неизвестные коэффициенты a_k определяем из системы (2.6) с соответствующей правой частью. Система (2.6) разрешима при выполнении условия (2.9). Найденное приближенное решение $\varphi_n(t)$ уравнения (3) с правой частью (3.5) или (3.6) подставляем в (3.3) или (3.4) и решаем уравнение (3) с правой частью

$$\omega_n(t) = \lambda \frac{g[\alpha(t)]}{\chi_n^+(t)} + \lambda R_{\varkappa'}[\alpha(t)] - R_{\varkappa'}(t),$$

где $\chi_n^+(t)$ получено по формуле (3.3) или (3.4) с заменой $\varphi(t)$ на $\varphi_n(t)$ и т. д. В этом случае теоремы 1 и 2 сохраняют свою силу. Методы редукции и механических квадратур на случай задачи Карлемана переносятся без изменений.

Замечание. Подобным образом можно построить приближенные решения задач $F^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{F^-(t)} + g(t)$; $F^+[\alpha(t)] = G(t) \times \overline{F^+(t)} + g(t)$.

Список литературы: 1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М., Физматгиз, 1970. 2. *Попов Г. Я., Тихоненко Н. Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином.— Прикл. математика и механика, 1974, т. 38, вып. 2, с. 312—321. 3. *Михайлов Л. Г.* Общая краевая задача о бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 5, с. 99—109. 4. *Квеселова Д. А.* Некоторые граничные задачи теории функций.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1948, т. XVI, с. 39—80. 5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968. 6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 7. *Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г.* Об одном типе сингулярных интегральных уравнений.— Сиб. мат. журн., 1964, т. V, № 3, с. 608—625. 8. *Бакушинский А. Б.* Некоторые вопросы приближенного решения интегральных уравнений со «слабой» особенностью.— Вычислительные методы и программирование. 1965, вып. X, с. 9—15. 9. *Тихоненко Н. Я.* Приближенное решение задачи Газемата.— Укр. мат. журн., 1974, т. 26, № 6, с. 842—845. 10. *Золотаревский В. А.* О сходимости коллокационного метода для систем сингулярных уравнений.— Мат. исследования, 1974, т. IX, вып. 1 (31), с. 56—69. 11. *Золотаревский В. А.* Решение сингулярных интегральных уравнений методом редукции.— Мат. исследования, 1974, т. IX, вып. 2 (32), с. 38—52. 12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959. 13. *Габдулхаев Б. Г.* Некоторые вопросы теории приближенных методов. I.— Изв. вузов. Математика, 1968, № 9, с. 16—28. 14. *Габдулхаев Б. Г.* Некоторые вопросы теории приближенных методов. IV.— Изв. вузов. Математика, 1971, № 6, с. 15—23. 15. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, Наукова думка. 1968. 210 с.

Поступила 26 мая 1975 г.