УДК 517.535.4

М. Н. ШЕРЕМЕТА

О k-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. III*

§ 8. Коэффициентная плотность целых периодических функций

Пусть теперь $D(0)$ и $D_1(0)$ — соответственно верхняя и верхняя 1-логарифмическая коэффициентные плотности, опреде-

* Статья является продолжением статей I, II. Нумерация параграфов продолжается.

ленные в § 7, целой функции $f(z)$, представленной рядом (7.1). А. О. Гельфонд [3] показал, что если целая функция [7.1] порядка $\rho > 1$ является периодической, то $D(0) \geqslant 1/(2\rho)$. М. Н. Зайцев [4] отметил, что теорема А. О. Гельфонда остается в силе, если условие периодичности заменить другим условием: $f(z)$ должно удовлетворять уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} f^{(n)}(z) = 0 \tag{8.1}$$

с характеристической функцией

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n. \tag{8.2}$$

Она является целой функцией нормального типа первого порядка, имеющей лишь простые нули $\alpha_k = r_k e^{i\theta}$, которые можно отделить друг от друга окружностями $|t - \alpha_k| = \varepsilon_k$, на которых

$$\ln|\varphi(t)| > -\exp\{((\sigma - \delta)/(\sigma - 1)) \ln/t/\}, \tag{8.3}$$

где числа σ и δ $(\sigma > \rho)$; $0 < \delta < 1)$ не зависят от k.

Мы обобщим результаты [3—4], заменив $D(0)$ на $D_1(0)$. Через C_j, $j = 1, 2, 3, 4$, обозначим абсолютные положительные постоянные.

Теорема 8.1. *Если целая функция* (7.1) *порядка* $\rho > 1$ *является периодической, то* $D_1(0) \geqslant 1/(2\rho)$.

Доказательство. Без нарушения общности можем считать, что период равен 1. Известно [3], что если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \times$ $\times\, a_n z^n$ — целая периодическая функция с периодом 1 порядка $\rho > 1$, то $a_n = (2\pi)^n \Phi(n)/(n!)$, где $\Phi(z)$ при $z = re^{i\theta}$ и $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$ является аналитической функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|\Phi(z)| \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{\rho - 1}{\rho} r \ln r \cos\theta + \frac{\pi}{2} r \sin\theta + 0(r \ln\cos\theta)\right\}.$$

Построим функцию

$$G(z) = \prod \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \exp\left\{\frac{2z}{\lambda_n}\right\}. \tag{8.4}$$

Поскольку $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant 1$, то [5, с. 128] при $z = re^{i\theta}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ $\leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ выполняется

$$|G(z)| \leqslant \exp\{(\psi(r) + C_2) r \cos\theta\}, \tag{8.5}$$

где $\psi(r) = 2L_1(r)$ при $r \geqslant \lambda_1$ и $\psi(r) = 0$ при $0 \leqslant r < \lambda_1$.

Поскольку $a_n = 0$ при $n \neq \lambda_i$, то $\Phi(n) = 0$ при $n \neq \lambda_j$. С другой стороны, $G(\lambda_j) = 0$, поэтому функция $\Phi(z) G(z)$ имеет нули в точках $z = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Допустим теперь, что теорема 1 не верна, т. е. $D_1(0) < 1/(2\rho)$, откуда $2D_1(0) + (\rho - 1)/\rho < 1$. Выберем γ так, чтобы $1 > \gamma > 2D_1(0) + (\rho - 1)/\rho$, и положим

$$F(z) = \frac{\Phi(z)\, G(z)}{\sin \pi z} \exp\{-\gamma z \ln(1+z)\}.$$

Функция $F(z)$ регулярна при $z = re^{i\theta}$ и $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$, и поскольку по определению $D_1(0)$ выполняется $\psi(r) = 2L_1(r) \leqslant 2D_1(0)\ln r + 0(\ln r)$ при $r \to \infty$, она удовлетворяет соотношениям

$$\left| F\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}}\right)\right| < C_3 \exp\left\{-(1-\gamma)\frac{\pi}{2}\, r\right\},$$

$$|F(r)| < \exp\left\{\left(2D_1(0) + \frac{\rho - 1}{\rho} - \gamma\right) r \ln r + 0(r \ln r)\right\}$$

и

$$|F(re^{i\theta})| < \exp\{C_4 r\}, \ |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Эти соотношения являются достаточными условиями для того, чтобы $F(z) \equiv 0$ (см. [6, с. 179, задача № 32]), т. е. $\Phi(z) \equiv 0$, а значит, и $f(z) \equiv 0$, что невозможно.

Теорема 8.2. *Если целая функция* [7.1] *порядка* $\rho > 1$ *удовлетворяет* (8.1) *с характеристической функцией* (8.2), *для которой выполняется* (8.3), *то имеет место утверждение теоремы* 8.1.

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства предыдущей лишь тем, что в этом случае вместо представления $a_n = (2\pi)^n \Phi(n)/(n!)$ следует использовать представление $a_n = \omega(n)/(n!)$, где $\omega(z)$ определена в [4] (см. 12 а).

§ 9. Коэффициентная плотность целых функций конечного порядка

Обозначим через $M(r)$ максимум модуля функции $f(z)$, представленной рядом (7.1) на окружности $|z| = r$ и положим

$$\rho_k = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, (\ln r)^{-1} \prod_{j=1}^{k-1} \ln_{j+1} M(r), \ k \geqslant 2, \tag{9.1}$$

$$\sigma_k = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{\ln_k \lambda_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{-\ln|a_{\lambda_j}|}. \tag{9.2}$$

Очевидно, что при $k = 2$ из (9.1) получаем определение обычного порядка ρ роста функции $f(z)$, если $\rho_k < \infty$, $k \geqslant 3$, то из (9.1) следует $\rho = 0$.

Теорема 9.1. *Для целой функции* (7.1) *имеет место неравенство*

$$\sigma_k \leqslant \rho_k D_k(0), \tag{9.3}$$

если только не выполняются одновременно равенства $D_k(0) = 0$ *и* $\rho_k = \infty$, *где* $D_k(0)$ — k-*логарифмическая верхняя плотность последовательности* $\{\lambda_n\}$.

Доказательство. Если $D_k(0)>0$ и $\rho_k=\infty$, неравенство (9.3) тривиально. Предположим, что $\rho_k<\infty$. Пусть $h(x)$ — положительная на $[a, \infty)$, дифференцируемая, монотонно возрастающая к ∞ вместе с x функция. Скажем, что $h(x)\in L^0$, если $\lim \frac{h((1+\gamma(x))x)}{h(x)}=1$ для всякой функции $\gamma(x)\to 0$ при $x\to\infty$. С. К. Балашов [7] показал, что если $\alpha(e^x)\in L^0$, $\beta(x)\in L^0$, а функция $F(x;c)=\beta^{-1}(c\alpha(x))$ удовлетворяет условию

$$\ln\frac{d\ln F(x;c)}{\alpha\ln x}=0(\ln x) \tag{9.4}$$

при $x\to\infty$ для всех C, $0<c<\infty$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\alpha(\ln M(r))}{\beta(r)}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(|a_{\lambda_n}|^{\frac{1}{\lambda_n}}\right)}. \tag{9.5}$$

Легко видеть, что функция $\alpha(x)=\prod\limits_{j=1}^{k-1}\ln_j x$, $k\geqslant 2$ такова, что функция $\alpha(e^x)=x\ln x\ldots\ln_{k-2}x$, $k\geqslant 2$ принадлежит L^0; функция $\beta(x)=\ln(x)$ также принадлежат L^0; и наконец, функция $F(x;c)=\exp\left\{c\prod\limits_{j-1}^{k-1}\ln_j x\right\}$, $k\geqslant 2$, удовлетворяет (9.4). Поэтому из (9.5) получаем

$$\rho_k=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\prod\limits_{j=0}^{k-1}\ln_j\lambda_n}{-\ln|a_{\lambda_n}|},\quad k\geqslant 2,$$

откуда для всякого $\varepsilon>0$, начиная с некоторого $n=n_0(\varepsilon)$, имеем

$$\frac{1}{-\ln|a_{\lambda_n}|}\leqslant\frac{\rho_k+\varepsilon}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}\ln_j\lambda_n}.$$

Итак, при достаточно больших n выполняется

$$\frac{1}{\ln_k\lambda_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{-\ln|a_{\lambda_j}|}=\frac{1}{\ln_k\lambda_n}\sum_{j=0}^{n_0(\varepsilon)-1}\frac{1}{\ln|a_{\lambda_j}|}+\frac{1}{\ln_k\lambda_n}\sum_{j=n_0(\varepsilon)}^{n}\frac{1}{-\ln|a_{\lambda_j}|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\rho_k+\varepsilon}{\ln_k\lambda_n}\sum_{j=n_0(\varepsilon)}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1}{\ln_i\lambda_j}.$$

Устремляя в последнем неравенстве $n\to\infty$, получаем неравенство $\sigma_k\leqslant(\rho_k+\varepsilon)D_k(0)$, откуда, ввиду производительности числа ε, получаем (9.3). Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда одновременно $D_k(0)=0$ и $\rho_k=\infty$, можно построить примеры целых функций, для которых в правой части (9.3) может стоять любое число γ, $0\leqslant\gamma\leqslant\infty$.

Отметим также, что взяв $k=2$, учитывая, что $D_2(0) \leqslant D(0)$, из (9.3) получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln\lambda_n} \sum \frac{1}{-\ln|a_{\lambda_j}|} \leqslant \rho D(0).$$

§ 10. Теорема единственности для аналитических в полуплоскости функций

Пусть $\{M_n\}$ — последовательность положительных чисел, а последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$\lambda_1 \geqslant p > 0,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant p,\ n \geqslant 1. \tag{10.1}$$

Положим

$$M_k(t) = \max_n \{nt - \ln M_n + 2n(L_1(n) - L_k(n))\}, \tag{10.2}$$

при $k=1$ из (10.2) получаем определение функции следа последовательности (см. [5]).

Следующая теорема примыкает к исследованиям С. Мандельбройта [5] и П. Малявина [8].

Теорема 10.1. *Пусть $f(z)$, $z = x + iy$ — аналитическая в полуплоскости $x > 0$ функция, имеющая нули в точках λ_n, удовлетворяющих* (10.1). *Тогда, если $|f(z)| \leqslant M_n$ при $n = [x]$ и для всех $a \in \boldsymbol{R}$ выполняется*

$$\int^{\infty} M_k(2L_k(t) - a)\frac{dt}{t^2} = \infty, \tag{10.3}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. В [6] Малявин доказал следующую теорему. Пусть $F(z)$ — мероморфная в $x > 0$ функция с нулями в точках λ_n и полюсами в точках μ_n, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_1 \geqslant h > 0,\ \mu_1 \geqslant h,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h,\ \mu_{n+1} - \mu_n \geqslant h,\ n \geqslant 1, \tag{10.4}$$

и $|F(z)| \leqslant M_n^*$ при $n = [x]$ для всех z вне кружков $K_n = \{z : |z - \lambda_n| \leqslant h/3\}$. Тогда, если для всех $a \in \boldsymbol{R}$ выполняется

$$\int^{\infty} M^*(k(t) - a)\frac{dt}{t^2} = \infty, \tag{10.5}$$

то $F(z) \equiv 0$, где $M^*(t)$ — функция следа последовательности $\{M_n^*\}$, а $k(t) = 2\inf\limits_{r \geqslant t}\left(\sum\limits_{\lambda_n \leqslant n} \frac{1}{\lambda_n} - \sum \frac{1}{\mu_n}\right)$.

В случае $k=1$, как мы уже заметили, $M_1(t) = M(t)$ и поскольку функция $f(z)$ не имеет полюсов, то в нашем случае

$$k(t) = 2\inf_{r > t} \sum_{\lambda_n = r} \frac{1}{\lambda_n} = 2\inf_{r > t} L_1(r) = 2L_1(t),$$

и, таким образом, справедливость теоремы 10.1 непосредственно следует из теоремы Малявина.

Пусть теперь $k \geqslant 2$. Положим $\mu_n = \lambda_n + \lambda_n \left(\prod_{j=1}^{k-1} \ln_j \lambda_n - 1 \right)^{-1}$. Легко проверить, используя теорему Лагранжа, что $\mu_{n+1} - \mu_n = (1 + 0(1)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ при $n \to \infty$, т. е. существует число $q > 0$ такое, что $\mu_1 \geqslant q$ и $\mu_{n+1} - \mu_n \geqslant q$. Положим $h = \min(pq)$. Тогда последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ удовлетворяют (10.4).

По последовательности $\{\mu_n\}$ построим функцию $G_k(z)$, аналогичную функции (8.4), т. е. $G_k(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n - z}{\mu_n + z} \exp\left\{\frac{2z}{\mu_n}\right\}$.

В [5, с. 128] показано, наряду с (8.5), что существует постоянная $C > 0$ такая, что при $x \geqslant 0$ вне кружков $K_n = \{z: |z - \lambda_n| \leqslant h/3\}$ выполняется

$$\ln|G_k(z)| \geqslant \begin{cases} \left(C + 2 \sum\limits_{\mu_n \leqslant r} \frac{1}{\mu_n}\right) x, & r \geqslant \mu_1, \\ C_x, & 0 \leqslant r < \mu_1. \end{cases} \tag{10.6}$$

Положим $F(z) = f(z)/G_k(z)$. Функция $F(z)$, мероморфная в полуплоскости $x > 0$, имеет нули в точках λ_n и полюсы в точках μ_n. Далее, ввиду (10.6), при $r \geqslant \mu_1$ имеем

$$|F(z)| \leqslant |f(z)| \exp\left\{ -\left(C + 2 \sum_{\mu_n = r} \frac{1}{\mu_n}\right) x \right\}$$

и, поскольку при $n \leqslant x < n + 1$, $x = r\cos\varphi$ выполняется $|f(z)| \leqslant M_n$ и $\sum\limits_{\mu_j \leqslant r} \frac{1}{\mu_j} = \sum\limits_{\mu_j \leqslant \frac{x}{\cos\varphi}} \frac{1}{\mu_j} \geqslant \sum\limits_{\mu_j \leqslant x} \frac{1}{\mu_j} \geqslant \sum\limits_{\mu_j \leqslant n} \frac{1}{\mu_j}$, то при $n \leqslant x < n + 1$ получаем

$$|F(z)| \leqslant M_n \exp\left\{ -\left(C + 2 \sum_{\mu_j \leqslant n} \frac{1}{\mu_j}\right) n \right\}. \tag{10.7}$$

Далее, обозначив $\varkappa(t) = \left(t \prod_{i=1}^{k-1} \ln_i t\right) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{k-1} \ln_i t - 1\right)$, имеем

$$L_1(t) - \sum_{\mu_n \leqslant 1} \frac{1}{\mu_n} = \sum_{\lambda_n \leqslant t} \frac{1}{\lambda_n} - \sum_{\lambda_n \leqslant t} \frac{1}{\mu_n} + \sum_{\substack{\lambda_n \leqslant t \\ \mu_n > t}} \frac{1}{\mu_n} = \sum_{\lambda_n \leqslant t} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \ln_j \lambda_n\right)^{-1} +$$

$$+ \sum_{t < \mu_n \leqslant \varkappa(t)} \frac{1}{\mu_n} = L_k(t) + 0\left(\ln \frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1} \ln_i t}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \ln_i t - 1} \right) + 0(1) =$$

$$= L_k(t) + 0(1), \quad t \to \infty.$$

Таким образом, для наших последовательностей $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ получаем $k(t) = 2L_k(t) + 0(1)$ и $\sum\limits_{\mu_n \leqslant 1} \frac{1}{\mu_n} = L_1(t) - L_k(t) + 0(1)$, $t \to \infty$. Поэтому из (10.7) следует, что при $n \leqslant x < n + 1$ выполняется $|F(z)| \leqslant M_n \exp\{-(C_1 + 2n(L_1(n) - L_k(n)))\}$, где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Обозначим $M_n^* = M_n \exp\{-(C_1 + 2n(L_1(n) - L_k(n)))\}$. Тогда $M^*(t) = \max\limits_n \{nt - \ln M_n^*\} = \max\{(t + C_1)n - \ln M_n + 2n(L_1(n) - L_k(n)\} = M_k(t + C_1)$ и условие (10.5) запишется в виде

$$\int^{\infty} M_k(2L_k(t) + C_1 + 0(1) - a)\frac{dt}{t^2} = \infty,$$

откуда, ввиду произвольности числа a, получаем, что из (10.3) следует (10.5). Применив теперь в функции $F(z)$ теорему Малявина, получаем, что $F(z) \equiv 0$, а значит, и $f(z) \equiv 0$.

Замечание. Пусть $\varphi(x)$ — дифференцируемая на $[a, \infty]$ функция, монотонно возрастающая к ∞ при $x \to \infty$ и удовлетворяющая условию $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} = h < 1$. Теорема 10.1 остается в силе, если вместо $L_k(t)$ взять $L\varphi(t) = \sum\limits_{\lambda_n} \varphi(\lambda_n)\}^{-1}$, а вместо $M_k(t)$ взять $M_\varphi(t) = \max\limits_n (nt - \ln M_n + 2n(i_1(n - L\varphi(n))\}$ следует выбрать следующим образом: $M_n = \lambda_n\varphi(\lambda_n)\{\varphi(\lambda_n) - 1\}^{-1}$.

Список литературы: 1. *Шеремета М. Н.* О k-логарифмической плотности последовательности и ее применении к целым функциям. I.— Теория функций. функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1976. вып. 25, с 131—142. 2. *Шеремета М. Н.* О k-логарифмической плотности последовательности и ее применении к целым функциям. II.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1976, вып. 25, с. 142—156. 3. *Гельфонд А. О.* О коэффициентах периодических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941. т. 5, с. 99—104. 4. *Зайцев М. Н.* О коэффициентах целых аналитических функций.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., 1957, № 3, с. 3—8. 5. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательности. Применения. М., Изд-во иностр. лит., 1955. 186 с. 6. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. I, М., Гостехиздат. 1956. 230 с. 7. *Балашов С. К.* О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней. Изв. вузов, математика, 1972, № 8, с. 10—18. 8. *Mallavin P.* Sur quelques procedes d'extrapolation.— Actd Math., 1955, vol. 93, p. 179—255.

Поступила 29 ноября 1976 г.