УДК 519.9

А. Н. ПЛИЧКО

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ТОТАЛЬНОЙ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E — банахово пространство и E' — его сопряженное. Набор $(x_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in I}$, где $x_\alpha \in E$, $f_\alpha \in E'$ называется ограниченной тотальной биортогональной системой, если $f_\alpha(x_\beta) = \delta_\alpha^\beta$ (δ — символ Кронекера), $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ тотально на E и $\sup\limits_\alpha \|f_\alpha\|\,\|x_\alpha\| < \infty$.

В работах [1, 2] показано, что ограниченная тотальная биортогональная система существует в сепарабельном банаховом пространстве, а в [2] устанавливается наличие такой системы для рефлексивного пространства. Из [3] следует существование ограниченной числом $2+\varepsilon$ (для любого ε) тотальной биортогональной системы в WCG-пространстве (см. также [4]). Целью настоящей статьи является доказательство существования ограниченной тотальной биортогональной системы в произвольном банаховом пространстве.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $[M]$ — замкнутая по норме линейная оболочка множества M; $M^\perp = \{f \in E' : f(M) \equiv 0\}$, если $M \subset E$ и $M^\perp = \{x \in E : x(M) \equiv 0\}$, если $M \subset E'$; $\bar{\alpha}$ — мощность порядкового числа α; $d(M, N)$ — расстояние между множествами M и N: $S(M) = \{x \in [M] : \|x\| = 1\}$.

Лемма 1. *Пусть M — подпространство банахова пространства E, $\|x\| = 1$ и $d(x, M) > a$. Тогда найдется непрерывный линейный функционал $f \in E'$, что $f(x) = 1$, $f \in M'$ и $\|f\| < 1/a$.*

Лемма 2. *Пусть M — подпространство пространства E и $\|x\| = \|f\| = f(x) = 1$. Если $d(x, M) < 1$, то $f^\perp \cap M \neq M$.*

Первая лемма является следствием теоремы Хана — Банаха, доказательство второй очевидно.

Лемма 3. *Для всякого бесконечномерного банахова пространства E и $0 < a < 1$ найдется биортогональная последовательность X, $F = \{x_m, f_m\}_1^\infty$, что $d(S(X), F^\perp) \geqslant a$ и X, F содержит под-*

последовательность $\tilde{X}$, $\tilde{F} = \left(\tilde{x}_n^j, \tilde{f}_n^j\right)_{n=1,\infty}^{j=1,n}$, *для которой* $\left\|\tilde{x}_n^j\right\| < (2-a)/a$, $1/(2-a) < \left\|\tilde{f}_n^j\right\| < 1/a$ *и* $\left\|\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_n^j\right\| < \sqrt{n}/a$.

Доказательство. Построим наборы векторов $\tilde{X} = \left(\tilde{x}_n^j\right)_{n=1,\infty}^{j=1,n}$, $Z = \left(z_n^j\right)_{n=1,\infty}^{j=1,k_n}$ из E и $\tilde{F} = \left(\tilde{f}_n^j\right)_{n=1,\infty}^{j=1,n}$, $H = \left(h_n^j\right)_{n=1,\infty}^{j=1,k_n}$ из E' (некоторые $\left(z_n^j, h_n^j\right)$ могут быть пустыми) так, чтобы для всякого n:

а) $d(S(\tilde{X}_n, Z_{n-1}), (\tilde{F}_n, H_n)^\perp) > a$, где $\tilde{X}_n = (\tilde{x}_i^j)_{i=1,n}^{j=1,i}$, $\tilde{F}_n = (\tilde{f}_i^j)_{i=1,n}^{j=1,i}$, $Z_n = (z_i^j)_{i=1,n}^{j=1,k_i}$, $H_n = (h_i^j)_{i=1,n}^{j=1,k_i}$; б) $\tilde{X}_n \subset H_n^\perp$, $Z_n \subset \tilde{F}_n^\perp$, $\tilde{f}_i^j(\tilde{x}_k^l) = h_i^j(z_k^l) = \delta_{ij}^{kl}$, где $\delta_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k,\ j = l, \\ 0 & \text{в противном случае:} \end{cases}$ в) $\|\tilde{x}_n^j\| < (2-a)/a$, $1/(2-a) < \|\tilde{f}_n^j\| < \frac{1}{a}$ и $\left\|\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_n^j\right\| < \frac{\sqrt{n}}{a}$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1 - a$. Построение указанных выше наборов будем вести индукцией по n; все векторы выберем ненулевыми не оговариваясь.

Возьмем $\tilde{x}_1^1 \in S(E)$ и $\tilde{f}_1^1 \in S(E')$, $\tilde{f}_1^1(\tilde{x}_1^1) = 1$. Положим Z_1, $H_1 = \varnothing$.

Пусть построены наборы $\tilde{X}_{n-1}$, $\tilde{F}_{n-1}$, Z_{n-1}, H_{n-1}, удовлетворяющие условиям а), б), в). На основании теоремы Дворецкого — Мильмана [5] выберем в подпространстве $(\tilde{X}_{n-1}, Z_{n-1})^\perp$ n-мерное подпространство M_n, которое $1-a$-изометрично евклидову, т. е. существует изоморфизм $T: M_n \to l_2^n$, что

$$a\|f\| < \|Tf\| < (2-a)\|f\| \tag{1}$$

и $d(S(M_n), [\tilde{F}_{n-1}, H_{n-1}]) > a$. Обозначим через $(e_j)_n^1$ ортонормированный базис пространства l_2^n и положим $\tilde{f}_n^j = T^{-1}e_j$. Легко видеть, что для всякого j $d(\tilde{f}_n^j, [(\tilde{F}_n \setminus \tilde{f}_n^j), Z_{n-1}]) > a/(2-a)$. Поэтому можно выбрать набор элементов $\tilde{x}_n^j \in E$ биортогональных к $\tilde{f}_n^j$, что $\|\tilde{x}_n^j\| < (2-a)/a$. Из (1) следует, что

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_n^j\right\| < \frac{1}{a}\left\|\sum_{j=1}^{n} e_j\right\| = \frac{\sqrt{n}}{a}.$$

Обозначим через $(y_n^j)^{j=1,k_n}$ ε-покрытие единичной сферы $S(X_n, Z_{n-1})$, а через $(g_n^j)^{j=1,k_n}$ функционалы, достигающие нормы на соответствующих y_n^j, т. е. $g_n^j(y_n^j) = \|g_n^j\| = 1$. Для $j = 1, k_n$, если

$$d(y_n^j, (\tilde{F}_n, H_n^{j-1})^\perp) < a + \varepsilon \tag{2}$$

(где $H_n^{j-1} = H_{n-1} \cup (h_n^m)^{m=1, j-1}$), то на основании леммы 2 выберем $z_n^j \in (\widetilde{F}_n, H_n^{j-1})^\perp$, $z_n^j \notin (g_n^j)^\perp$. Поскольку $d(z_n^j, [\widetilde{X}_n, Z_n^{j-1}, (g_n^j, \widetilde{F}_n, H_n^{j-1})^\perp]) > 0$, то на основании леммы 1 выберем $h_n^j \in \times (\widetilde{X}_n, Z_n^{j-1}, (g_n^j, \widetilde{F}_n, H_n^{j-1})^\perp)^\perp$, $h_n^j(z_n^j) = 1$, где $Z_n^{j-1} = Z_{n-1} \cup \times (z_n^m)^{m=1, j-1}$. Если же неравенство (2) не выполняется, то положим $(z_n^j, h_n^j) = \varnothing$. Очевидно, наборы $\widetilde{X}_n$, $\widetilde{F}_n$, Z_n, H_n также будут удовлетворять условиям а), б), в). Для завершения доказательства осталось положить $(x_m)_1^\infty = (\widetilde{x}_n^j)_{n=1, \infty}^{j=1, n} \cup (z_n^j)_{n=1, \infty}^{j=1, k_n}$ и $(f_m)_1^\infty = (\widetilde{f}_n^j)_{n=1, \infty}^{j=1, n} \cup (h_n^j)_{n=1, \infty}^{j=1, k_n}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть E — банахово пространство, E' — его сопряженное, P — подпространство E, Q — подпространство E', $0 < a < 1$, ω — первое бесконечное порядковое число, $(x_\delta^\eta, f_\delta^\eta)_{\omega \leqslant \delta < \alpha}^{\eta \in I_\delta}$ — биортогональная система, $X_\delta = (x_\gamma^\eta)_{\omega \leqslant \gamma < \delta}^{\eta \in I_\gamma}$, $F_\delta = (f_\delta^\eta)_{\omega \leqslant \gamma < \delta}^{\eta \in I_\gamma}$. Если 1)* $\operatorname{card}(\bigcup_{\gamma \leqslant \delta} I_\gamma) = \delta$ *для всякого* $\omega \leqslant \delta < \alpha$; *2)* $d(S(P), Q^\perp \neq 0$; *3)* $X_\alpha \subset P$, $F_\alpha \subset Q$, *то* X_α, F_α *можно расширить до биортогональной системы* $X_{\alpha+1}$, $F_{\alpha+1}$, *для которой:* 1′) $\operatorname{card}(\bigcup_{\gamma \leqslant \alpha} I_\gamma) = \alpha$; 2′) $d(S(X_{\alpha+1}), (F_{\alpha+1}, Q)^\perp) \geqslant a$; 3′) $(x_\alpha^\eta)^{\eta \in I_\alpha} \subset Q^\perp$, $(f_\alpha^\eta)^{\eta \in I_\alpha} \subset P^\perp$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по α. Пусть $\alpha = \omega + 1$, I_ω здесь можно считать множеством натуральных чисел, X_α, F_α совпадает с $X_{\omega+1}$, $F_{\omega+1} = (x_\omega^n, f_\omega^n)^{n=1, \infty}$. В этом случае расширение $X_{\omega+1}$, $F_{\omega+1}$ производится подобно доказательству леммы 3. Построим наборы $Z_{\omega+1} = (z_n^j)_{n=1, \infty}^{j=1, k_n}$ из $Q^\perp$ и $H_{\omega+1} = (h_n^j)_{n=1, \infty}^{j=1, k_n}$ из $P^\perp$ так, чтобы для всякого n: а) $d(S \times (X_\omega^n, Z_{n-1}), (Q, H_n)^\perp) \geqslant a$, где $X_\omega^n = (X_\omega^i)^{i=1, n}$, $Z_n = (z_i^j)_{i=1, n}^{j=1, k_i}$, $H_n = (h_i^j)_{i=1, n}^{j=1, k_i}$; б) $h_i^j(z_k^l) = \delta_{ij}^{kl}$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1 - a$ и g_1^1 — функционал, достигающий нормы на x_ω^1. Если

$$d(S(x_\omega^1), Q^\perp) < a + \varepsilon, \tag{3}$$

то на основании леммы 2 выберем $z_1^1 \in Q^\perp$, $z_1^1 \notin (g_1^1)^\perp$. Поскольку $d(z_1^1, [P, (g_1^1, Q)^\perp]) > 0$, то на основании леммы 1 выберем $h_1^1 \in (P, (g_1^1, Q)^\perp)^\perp$, $h_1^1(z_1^1) = 1$. Если же неравенство (3) не выполняется, то положим $(z_1^1, h_1^1) = \varnothing$. Очевидно, z_1^1, h_1^1 удовлетворяет условиям а), б) и $z_1^1 \in Q^\perp$, $h_1^1 \in P^\perp$.

Пусть построены наборы Z_{n-1} из $Q^\perp$ и H_{n-1} из $P^\perp$, удовлетворяющие условиям а), б). Обозначим через $(y_n^j)^{j=1, k_n}$ ε-покрытие единичной сферы $S(X_\omega^n, Z_{n-1})$, а через g_n^j — функционалы, достигающие нормы на соответствующих y_n^j.

Для $j=1, k_n$, если

$$d(y_n^j, (Q, H_n^{j-1})^\perp) < a + \varepsilon \tag{4}$$

(где $H_n^{j-1} = H_{n-1} \cup (h_n^m)^{m=1, j-1}$), то на основании леммы 2 выберем $z_n^j \in (Q, H_n^{j-1})^\perp$, $z_n^j \notin (g_n^j)^\perp$. Поскольку $d(z_n^j, [P, Z_n^{j-1}, (g_n^j, Q, H_n^{j-1})^\perp]) \neq 0$, то на основании леммы 1 выберем $h_n^j \in (P, z_n^{j-1}, (g_n^j, Q, H_n^{j-1})^\perp)^\perp$, $h_n^j(z_n^j) = 1$, где $Z_n^{j-1} = Z_{n-1} \cup (z_n^m)^{m=1, j-1}$. Если же неравенство (4) не выполняется, то положим $(z_n^j, h_n^j) = \varnothing$. Очевидно, набор Z_n, H_n также будет удовлетворять условиям а), б), $Z_n \subset Q^\perp$, $H_n \subset P^\perp$. Положим $(x_{\omega+1}^\eta, f_{\omega+1}^\eta)^{\eta \in I_{\omega+1}} = (z_i^j, h_i^j)_{i=1, n}^{j=1, k_i}$. Тогда система $X_{\omega+2}$, $F_{\omega+2} = (x_\gamma^\eta, f_\gamma^\eta)_{\gamma=\omega, \omega+1}^{\eta \in I_\gamma}$ будет удовлетворять условиям 1′) — 3′).

Пусть всякую биортогональную систему X_β, F_β $(\beta < \alpha)$, для которой выполняются условия 1) — 3), можно расширить до системы $X_{\beta+1}$, $F_{\beta+1}$ с соблюдением условий 1′) — 3′). Покажем, что если для X_α, F_α выполняются условия 1) — 3), то ее можно расширить до биортогональной системы $X_{\alpha+1}$, $F_{\alpha+1}$ с соблюдением условий 1′) — 3′).

Если α и $\alpha - 1$ не предельные порядковые числа, то $X_\alpha F_\alpha = (X_{\alpha-2}, F_{\alpha-2}) \cup (x_{\alpha-2}^\eta, f_{\alpha-2}^\eta)^{\eta \in I_{\alpha-2}} \cup (x_{\alpha-1}^\eta, f_{\alpha-1}^\eta)^{\eta \in I_{\alpha-1}}$. Положим

$$(\tilde{x}_{\alpha-2}^\eta, \tilde{f}_{\alpha-2}^\eta)^{\eta \in \tilde{I}_{\alpha-2}} = (x_\beta^\eta, f_\beta^\eta)_{\beta=\alpha-1, \alpha-2}^{\eta \in I_{\alpha-1} \cup I_{\alpha-2}} \text{ и } \tilde{X}_{\alpha-1}, \tilde{F}_{\alpha-1} =$$

$$= (X_{\alpha-2}, F_{\alpha-2}) \cup (\tilde{x}_{\alpha-2}^\eta, \tilde{f}_{\alpha-2}^\eta)^{\eta \in \tilde{I}_{\alpha-2}}.$$

Система $\tilde{X}_{\alpha-1}$, $\tilde{F}_{\alpha-1}$ удовлетворяет условиям 1) — 3) и по предложению индукции ее можно расширить до системы $\tilde{X}_\alpha$, $\tilde{F}_\alpha = (\tilde{X}_{\alpha-1}, \tilde{F}_{\alpha-1}) \cup (\tilde{x}_{\alpha-1}^\eta, \tilde{f}_{\alpha-1}^\eta)^{\eta \in \tilde{I}_{\alpha-1}}$ с выполнением условий 1′) — 3′). Положим теперь $(x_\alpha^\eta, f_\alpha^\eta)^{\eta \in I_\alpha} = (\tilde{x}_{\alpha-1}^\eta, \tilde{f}_{\alpha-1}^\eta)^{\eta \in \tilde{I}_{\alpha-1}}$ и $X_{\alpha+1}$, $F_{\alpha+1} = (x_\beta^\eta, f_\beta^\eta)_{\omega \leqslant \beta \leqslant \alpha}^{\eta \in I_\beta}$.

Если α не предельное, а $\alpha-1$ предельное порядковые числа, то X_α, $F_\alpha = (X_{\alpha-1}, F_{\alpha-1}) \cup (x_{\alpha-1}^\eta, f_{\alpha-1}^\eta)^{\eta \in I_{\alpha-1}}$. Поскольку card $I_{\alpha-1} = \alpha - 1$, то можно считать $I_{\alpha-1} = \{\beta : \omega \leqslant \beta < \alpha - 1\}$. Расширение системы X_α, F_α будем производить последовательно.

Набор $(X_{\omega+1}, x_{\alpha-1}^\omega, F_{\omega+1}, f_{\alpha-1}^\omega)$ удовлетворяет условиям 1) — 3) (если в качестве $(x_{\omega+1}^\eta, f_{\omega+1}^\eta)^{\eta \in I_{\omega+1}}$ из условий леммы взять $(x_{\alpha-1}^\omega, f_{\alpha-1}^\omega)$, а в качестве X_α, F_α взять $((X_{\omega+1}, x_{\alpha-1}^\omega), (F_{\omega+1}, f_{\alpha-1}^\omega)))$, поэтому по предположению индукции его можно расширить до набора $((X_{\omega+1}, x_{\alpha-1}^\omega, Z_{\omega+1}), (F_{\omega+1}, f_{\alpha-1}^\omega, H_{\omega+1}))$ (где $Z_{\omega+1}$,

$H_{\omega+1} = (z_\omega^n, h_\omega^n)^{n=1,\infty}$) с выполнением условий 1′) — 3′). (Если в качестве $(x_{\omega+2}^\eta, f_{\omega+2}^\eta)^{\eta\in I_{\omega+2}}$ взять $Z_{\omega+1}$, $H_{\omega+1}$).

Пусть $\beta < \alpha - 1$. Предположим, что для всех $\gamma < \beta$ построены расширения Z_γ, $H_\gamma = (z_\delta^\eta, h_\delta^\eta)^{\eta\in I_\delta}_{\omega<\delta<\gamma}$ биортогональных систем $X_{\alpha-1}^\gamma$, $F_{\alpha-1}^\gamma$, где $X_{\alpha-1}^\gamma = X_\gamma \cup (x_{\alpha-1}^\delta)^{\omega<\delta<\gamma}$, $F_{\alpha-1}^\gamma = F_\gamma \cup (f_{\alpha-1}^\delta)^{\omega<\delta<\gamma}$ такие, что системы $((X_{\alpha-1}^\gamma, Z_\gamma), (F_{\alpha-1}^\gamma, H_\gamma))$ удовлетворяют условиям 1′) — 3′). (Если в качестве X_α, F_α взять $X_{\alpha-1}^\gamma$, $F_{\alpha-1}^\gamma$, а в качестве $(x_\alpha^\eta, f_\alpha^\eta)^{\eta\in I_\alpha}$ — Z_γ, H_γ). По предположению индукции систему $((X_{\alpha-1}^\beta, \tilde{Z}_\beta), (F_{\alpha-1}^\beta, \tilde{H}_\beta))$ (где $\tilde{Z}_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} Z_\gamma$, $\tilde{H}_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} H_\gamma$) можно расширить до биортогональной системы $((X_{\alpha-1}^\beta, Z_\beta), (F_{\alpha-1}^\beta, H_\beta))$ с выполнением условий 1′) — 3′). (Если в качестве X_α, F_α взять $((X_{\alpha-1}^\beta \cup \tilde{Z}_\beta), (F_{\alpha-1}^\beta \cup \tilde{H}_\beta))$, в качестве $(x_\alpha^\eta, f_\alpha^\eta)^{\eta\in I_\alpha}$ — Z_β, H_β, а в качестве P и Q — $[P, \tilde{Z}_\beta]$ и $[Q, \tilde{H}_\beta]$). Положим теперь $(x_\alpha^\eta, f_\alpha^\eta)^{\eta\in I_\alpha} = (z_\beta^\eta, h_\beta^\eta)^{\eta\in I_\beta}_{\omega<\beta<\alpha-1}$. Очевидно, система $X_{\alpha+1}$, $F_{\alpha+1} = (X_{\alpha-1}, F_{\alpha-1}) \cup (x_\alpha^\eta, f_\alpha^\eta)^{\eta\in I_\alpha}$ будет удовлетворять условиям 1′) — 3′).

Если же α — предельное порядковое число, то расширение производится точно так же, как и в предыдущем случае, только вместо $\alpha - 1$ надо брать α, а вместо $(x_{\alpha-1}^\eta, f_{\alpha-1}^\eta)^{\eta\in I_{\alpha-1}}$ — $\varnothing$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть M и N — бесконечномерные подпространства пространства E и $d(S(M), N) > a > 0$. Тогда для всякого n найдется биортогональная система $(x_i, f_i)_1^n$, $X_i \in N$, $f_i \in M^\perp$, что* $1/(2-a) < \|f_i\| < (5-2a)/a$, $\|x_i\| < 2(2-a)/a$ и

$$\left\| \sum_1^n f_i \right\| < \frac{2-a}{a}\sqrt{n}.$$

Доказательство. Легко проверить, что фактор-пространство $M^\perp/(M+N)^\perp$ изоморфно сопряженному к подпространству N, причем

$$\|f\|_{N^*} \leqslant \|f\|_{M^\perp/(M+N)^\perp} \leqslant \frac{2}{a}\|f\|_{N^*}. \tag{5}$$

На основании теоремы Дворецкого [6] выберем в $M^\perp/(M+N)^\perp$ подпространство M_n, которое $1-a$ -изометрично n-мерному евклидову пространству, т. е. существует изоморфизм $T: M_n \to l_2^n$, что $a\|f\| < \|Tf\| < (2-a)\|f\|$. Обозначим через $(e_i)_1^n$ ортонормированный базис пространства l_2^n и положим $\hat{f}_i = T^{-1}e_i$. Очевидно, для всякого i $d(\hat{f}_i, [\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_{i-1}, \hat{f}_{i+1}, \ldots, \hat{f}_n] > 1/(2-a)$ и $1/(2-a) < \|\hat{f}_i\| < 1/a$.

Исходя из этого и (5) в N можно выбрать элементы x_i биортогональные к $\hat{f}_i$, чтобы $\|x_i\| < 2(2-a)/a$. Выберем представителя $\tilde{f}_i$ из классов $\hat{f}_i$ так, чтобы $\|\hat{f}_i\| < 1/a$. Тогда в подпространстве $(M+N)^{\perp}$ найдется элемент g такой, что $\left\|\sum_1^n \tilde{f}_i + g\right\| <$

$$< (2-a)\left\|\sum_1^n \hat{f}_i\right\| < \frac{2-a}{a}\left\|\sum_1^n e_i\right\| = \frac{2-a}{a}\sqrt{n}. \tag{6}$$

Положим $f_i = \tilde{f}_i + g/n$. Тогда поскольку $\left\|\sum_1^n \tilde{f}_i\right\| < \frac{n}{a}$, то вследствие (6) $\|g\| < 2(2-a)\,n/a$ и $\frac{1}{2-a} < \|\hat{f}_i\| \leqslant \|f_i\| < \frac{1}{a} + \frac{2(2-a)}{a} = \frac{5-2a}{a}$. В силу (6) $\left\|\sum_1^n f_i\right\| < \frac{2-a}{a}\sqrt{n}$.

Лемма 6. *Для всякого банахова пространства E и $0 < a < 1$ найдется биортогональная система X_α, $F_\alpha = (x_\gamma^\eta,\ f_\gamma^\eta)_{\omega \leqslant \gamma < \alpha}^{\eta \in I_\gamma}$ такая, что $F_\alpha^{\perp}$ конечномерно и для всякого $\omega \leqslant \gamma \leqslant \alpha$: 1)* $\operatorname{card}\big(\bigcup_{\delta \leqslant \gamma} I_\delta\big) = \overline{\overline{\gamma}}$; *2) $d\big(S(X_\gamma),\ F_\gamma^{\perp}\big) \geqslant a$; 3) $X_{\omega+1}$, $F_{\omega+1}$ содержит подпоследовательность $(x_n^i,\ f_n^i)_{n=1,\,\infty}^{i=1,\,n}$, для которой $\|x_n^i\| < (2-a)/a$, $1/(2-a) < \|f_n^i\| < 1/a$ и $\left\|\sum_{i=1}^n f_n^i\right\| < \frac{\sqrt{n}}{a}$; 4) если γ предельное и $F_{\gamma+n}^{\perp}$ бесконечномерно, то для $i = \overline{0,\ n}$, $1/(2-a) < \|f_{\gamma+n}^i\| < (5-2a)/a$, $\|x_{\gamma+n}^i\| < \frac{2(2-a)}{a}$ и $\left\|\sum_{i=1}^n f_{\gamma+n}^i\right\| < \frac{2-a}{a}\sqrt{n}$.*

Доказательство. Построение X_α, F_α будем производить последовательно. На основании леммы 3 выберем систему $X_{\omega+1}$, $F_{\omega+1} = (x_\omega^\eta,\ f_\omega^\eta)^{\eta \in I_\omega}$ со свойствами 1) — 3). Согласно лемме 5 выберем биортогональные

$$(x_{\omega+1}^i,\ f_{\omega+1}^i)_{i=0}^1,\ (x_{\omega+1}^i)_{i=0}^1 \subset F_{\omega+1}^{\perp},\ (f_{\omega+1}^i)_{i=0}^1 \subset X_{\omega+1}^{\perp},$$

для которых выполняется условие 4. Очевидно, система $(X_{\omega+1}$, $(x_{\omega+1}^i)_{i=0}^1$, $F_{\omega+1}$, $(f_{\omega+1}^i)_{i=0}^1)$ удовлетворяет условиям леммы 4, поэтому ее можно расширить до системы $X_{\omega+2}$, $F_{\omega+2}$ с соблюдением условий настоящей леммы.

Пусть для $\delta < \gamma$ системы X_δ, F_δ построены и $\gamma = \beta + n$, где β — предельное порядковое число. Если $n = 0$, то положим X_γ, $F_\gamma = \bigcup_{\omega \leqslant \delta < \gamma} (X_\delta,\ F_\delta)$. Если же $n \neq 0$, то согласно лемме 5 выберем биортогональные наборы $(x_{\gamma-1}^i)_{i=0}^{n-1} \subset F_{\gamma-1}^{\perp}$ и $(f_{\gamma-1}^i)_{i=0}^{n-1} \subset X_{\gamma-1}^{\perp}$, которые удовлетворяют условию 4. Очевидно, система $(X_{\gamma-1}$, $(x_{\gamma-1}^i)_{i=0}^{n-1}$, $F_{\gamma-1}$, $(f_{\gamma-1}^i)_{i=0}^{n-1})$ удовлетворяет условиям леммы 4, поэтому ее можно расширить до системы X_γ, F_γ с соблюдением условий 1) — 4). Процесс построения остановится на том α, при котором $F_\alpha^{\perp}$ будет конечномерно. Лемма доказана.

Теорема. *Во всяком банаховом пространстве существует ограниченная тотальная биортогональная система.*

Доказательство. Мы проведем рассуждения подобные тем, которые использовались в [2]. Пусть X_α, F_α — система, построенная в лемме 6. Поскольку $(F_\alpha^\perp)^\perp + X_\alpha^\perp = E'$ и $F_\alpha^\perp$ конечномерно, то в $X_\alpha^\perp$ можно выбрать конечный набор $G = (g_i)_1^r$ так, что $F_\alpha \cup G$ тотально на E. Пусть Ω — первое несчетное порядковое число. Рассмотрим отдельно случаи, когда $\alpha < \Omega$ и $\alpha \geqslant \Omega$.

1. $\underline{\alpha < \Omega}$. Пусть X, $F = (x_n^i, f_n^i)_{n=1,\infty}^{i=1,n}$ — система, существование которой утверждается в пункте 3) леммы 6. Согласно пункту 1) леммы 6 множество F_α счетно. Пусть φ — некоторая функция, отображающая множество $\{(f_n^i)_{i=1}^n\}_{n=1}^\infty$, элементами которого являются наборы $(f_n^i)_{i=1}^n$, на все $((F_\alpha \setminus F) \cup G) \times N$. (Через N здесь обозначаем множество натуральных чисел). Обозначим через f_n первую компоненту элемента $\varphi\ ((f_n^i)_{i=1}^n)$. Положим $\tilde{x}_n^i = x_n^i$,

$$\tilde{f}_n^i = f_n^i + (1 - a)\, f_n / \| f_n \| \tag{7}$$

и покажем, что система $\tilde{X}$, $\tilde{F} = (\tilde{x}_n^i, \tilde{f}_n^i)_{n=1,\infty}^{i=1,n}$ будет удовлетворять условиям теоремы.

Биортогональность непосредственно следует из определения.

Поскольку φ является функцией на все $((F_\alpha \setminus F) \cup G) \times N$, то для всякого $f \in (F_\alpha \setminus F) \cup G$ существует последовательность n_k, что $f = f_{n_k}$ при $k = 1, \infty$. По свойству 3) леммы 6

$$\left\| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_k} f_{n_k}}{n_k} - \frac{(1-a)\, f_{n_k}}{\| f_{n_k} \|} \right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

и тем самым $(F_\alpha \setminus F) \cup G \subset [\tilde{F}]$. Из сказанного выше и (7) следует, что $F \subset [\tilde{F}]$. Поскольку $F_\alpha \cup G$ тотально на E, то и $\tilde{F}$ также тотально на E.

Ограниченность системы $\tilde{X}$, $\tilde{F}$ следует из (7) и условия 3) леммы 6. Действительно:

$$\| \tilde{x}_n^i \| \| \tilde{f}_n^i \| \leqslant \| x_n^i \| (\| f_n^i \| + \| (1 - a) f_n \| / \| f_n \|) \leqslant (2 - a)(1/a + 1 - \\ - a)/a.$$

2. $\underline{\alpha \geqslant \Omega}$. Пусть X, $F = (x_{\beta+n}^i, f_{\beta+n}^i$: β — предельное, $n = 0, \infty$, $i = 0, n)$ — подсистема системы X_α, F_α, существование которой утверждается в пункте 4) леммы 6. В силу условия 1) леммы 6 мощность множества $(F_\alpha \setminus F) \cup G$ не больше $\overline{\overline{\alpha}}$. Поскольку мощность множества $\{(f_{\beta+n}^i)_{n=0,\infty}^{i=0,n}$: β — предельное$\}$, элементами которого являются последовательности $(f_{\beta+n}^i)_{n=0,\infty}^{i=0,n}$ равна $\overline{\overline{\alpha}}$, то

существует функция φ, отображающая это множество на все $F_\alpha/F)\cup G$. Положим $f_\beta=\varphi\left(\left(f^i_{\beta+n}\right)^{i=0,\,n}_{n=0,\,\infty}\right)$, $\tilde{x}^i_{\beta+n}=x^i_{\beta+n}$,

$$\tilde{f}^i_{\beta+n}=f^i_{\beta+n}+(1-a)\,f_\beta/\|f_\beta\| \tag{8}$$

и покажем, что система $\tilde{X}$, $\tilde{F}=\{x^i_{\beta+n},\ f^i_{\beta+n}\}$ будет удовлетворять условиям теоремы.

Биортогональность ее следует из определения.

Из условия 4) леммы 6 получаем

$$\left\|\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{f}^i_{\beta+n}}{h}-\frac{(1-a)\,f_\beta}{\|f_\beta\|}\right\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

и тем самым $(F_\alpha/F)\cup G\subset[\tilde{F}]$. Согласно (8) и сказанному выше $F\subset[\tilde{F}]$. Таким образом $\tilde{F}$ тотально. Ограниченность системы $\tilde{X}$, $\tilde{F}$ следует из (8) и условия 4) леммы 6. Действительно:

$$\|\tilde{x}^i_{\beta+n}\|\,\|\tilde{f}^i_{\beta+n}\|\leqslant\|x^i_{\beta+n}\|\left(\|f^i_{\beta+n}\|+\|(1-a)\,f_\beta\|/\|f_\beta\|\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\,(2-a)}{a}\left(\frac{5-2a}{a}+1-a\right).$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает, что для всякого ε в банаховом пространстве существует тотальная биортогональная система $(x_\alpha,\ f_\alpha)$ $\alpha\in I$, что $\sup\|f_\alpha\|\,\|x_\alpha\|<6+\varepsilon$. По-видимому эту оценку можно улучшить, так как в лемме 6 мы использовали довольно грубые неравенства.

Список литературы: 1. *Singer I.* On biorthogonal systems and total sequences of functionals. II. — Math. Ann., 1973, voll. 201, p. 1—8. 2. *Davis W., Johnson W. B.* On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces. — Studia Math., 1973, vol. 45, № 2, p. 173—179. 3. *Khurana S. S.* Extension of total bounded functionals in normed spaces. — Math. Ann., 1975, vol. 217, № 1, p. 153—154. 4. *Пличко А. Н.* Существование ограниченного М-базиса в WCG - пространстве. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Вып. 32. Харьков, 1979, с. 61—69. 5. *Pelczynski A.* All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon>0$ fundamental total and bounded by $1+\varepsilon$ biorthogonal sequences. — Studia Math., 1976, vol. 55, № 3, p. 295—304. 6. *Дворецкий А.* Некоторые результаты о выпуклых телах в банаховых пространствах. — Математика (сб. переводов), 1968, т. 8, № 1, с. 70—102.

Поступила 1 октября 1975 г.