УДК 517.535.4

А. З. МОХОНЬКО

ОЦЕНКИ РОСТА ВЕТВЕЙ АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Нами получены оценки роста ветвей алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик. Будем использовать стандартные обозначения теории мероморфных функций [1], а также основные свойства и определения теории мероморфных кривых [2, 3]. Скажем, что $f(z) \in M_R$, $R \leqslant \infty$, если $f(z)$ — функция, мероморфная в $\{|z| < R\}$. Совокупность функций $f(z) \in M_R$ образует поле, называемое полем M_R.

Пусть дано уравнение

$$P(z, u) = \sum_{j=0}^{m} P^{m-j} = 0, \; P_j(z) \in M_R, \; 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{1}$$

Мы не требуем, чтобы многочлен $P(z, u)$ был неприводим над полем M_R. Решение $u = u^*(z)$ уравнения (1) есть m-значная алгеброидная функция, которая в окрестности точки z_0 представляется посредством элементов $\varepsilon_k(z_0) = \sum_{j=\mu_k}^{\infty} a_{jk}(z-z_0)^{j/\nu_k}, 1 \leqslant k \leqslant \leqslant s \leqslant m$; $\sum_{k=1}^{s} \nu_k = m$; $s = s(z_0)$. Каждому элементу $\varepsilon_k(z_0)$ поставим в соответствие множество $\{n_{ik}\}_{i=1}^{\nu_k}$, где $n_{ik} = 0$, если $\mu_k \geqslant 0$, $n_{ik} = -\mu_k/\nu_k > 0$, если $\mu_k < 0$. Множество $L = \bigcup_{k=1}^{s} \{n_{ik}\}_{i=1}$ состоит из m чисел (не обязательно различных). Расположим их в порядке убывания, обозначая через $n(z_0, u_j)$; $n(z_0, u_j) \in L$, $n(z_0, u_1) \geqslant \geqslant \ldots \geqslant n(z_0, u_m)$. Положим $n(z_0, u) = \sum_{j=1}^{m} n(z_0, u_j)$; $n(r, u) = \sum_{|z| \leqslant r} n(z, u)$; $n(r, u_j) = \sum_{|z| \leqslant r} n(z, u_j)$. Тогда $n(r, u) = \sum_{j=1}^{m} n(r, u_j)$. Расположим m значений функции $u^*(z)$ в порядке убывания модуля $|u_1^*| \geqslant \ldots \geqslant |u_m^*|$. В дальнейшем будем обозначать $|u_j^*(z)| = u_j(z) = u_j$; $1 \leqslant j \leqslant m$, так что

$$u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_m. \tag{2}$$

Для алгеброидных функций введем величины (ср. [4]):

$$m(r, u_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ u_j(re^{i\theta})\, d\theta;$$

$$N(r, u_j) = \int_0^r [n(t, u_j) - n(0, u_j)]\, t^{-1} dt + n(0, u_j) \ln r;$$

$$T(r, u_j) = m(r, u_j) + N(r, u_j); \; m(r, u) = \sum_{j=1}^{m} m(r, u_j);$$

$$N(r, u) = \sum_{j=1}^{m} N(r, u_j); \quad T(r, u) = \sum_{j=1}^{m} T(r, u_j).$$

Ясно, что $n(z_0, u_j)$ равно порядку полюса ветви u_j в точке z_0.

Пусть алгеброидная функция $u^*(z)$ определяется уравнением (1). Рассмотрим мероморфную кривую [3, с. 102]

$$G_1 = \left\{1, \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{m!}, \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{\frac{m!}{2}}, \ldots, \left(\frac{P_m}{P_0}\right)^{\frac{m!}{m}}\right\}, \tag{3}$$

компоненты которой выражаются через коэффициенты P_j уравнения (1). Установим связь между ростом ветви u_1 функции $u^*(z)$ и коэффициентами P_j.

Теорема 1. *Пусть алгеброидная функция $u^*(z)$ определяется уравнением (1). Тогда $m!\,T(r, u_1) = T(r, G_1) + O(1)$, где G_1 определено в (3).*

Если предположить, что алгеброидная функция $u^*(z)$ определяется уравнением (1), у которого

$$P_j = \sum_{i=0}^{\varkappa_j} a_{ij} f^{\varkappa_j - i}; \quad a_{ij}(z),\ f(z) \in M_R,\ 0 \leqslant j \leqslant m, \tag{4}$$

то через коэффициенты P_j можно выразить и рост ветвей $u_2, \ldots, u_m$, используя понятие ломаной Ньютона.

Отметим на плоскости систему K точек $(j, \varkappa_j)$, $0 \leqslant j \leqslant m$, где $\varkappa_j$ определены в (4). Построим для точек K ломаную Ньютона (л. Н.): найдем выпуклую оболочку множества K; граница оболочки есть многоугольник; этот многоугольник точками $(0, \varkappa_0)$, $(m, \varkappa_m)$ разбивается на две ломаные, верхняя из них и есть л. Н. Все точки множества K лежат не выше л. Н. Пусть q — наименьший номер такой, что $\varkappa_q = \max \varkappa_j$. Точка $(q, \varkappa_q)$ является одной из вершин л. Н. Пусть вершины л. Н. имеют абсциссы $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_t = m$. Тогда для некоторого p, $0 \leqslant p \leqslant t$ выполняется $q = i_p$. Поэтому

$$\varkappa_{i_p} = \max \varkappa_j,\ 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{5}$$

Положим

$$\alpha_k = (\varkappa_{i_k} - \varkappa_{i_{k-1}})/(i_k - i_{k-1}),\ 1 \leqslant k \leqslant t. \tag{6}$$

Из определения л. Н. следует

$$\alpha_k = \max\,(\varkappa_j - \varkappa_{i_{k-1}})/(j - i_{k-1}),\ i_{k-1} < j \leqslant m, \tag{7}$$

причем i_k — наибольший номер, для которого в (7) достигается максимум. Очевидно $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_t$. Рассмотрим некоторые свойства л. Н. Пусть $i_s + 1 \leqslant j$. Из 7 следует

$$\varkappa_{i_S} - \varkappa_j + \alpha_S(j - i_S) = (j - i_S)\left(\alpha_S - \frac{\varkappa_j - \varkappa_{i_S}}{j - i_S}\right) \geqslant$$
$$\geqslant (j - i_S)(\alpha_S - \alpha_{S+1}) \geqslant (\alpha_S - \alpha_{S+1}) > 0. \tag{8}$$

Пусть $\tau \geqslant 0$ — целое число. Точка $(\tau, \varkappa_\tau)$ из множества K лежит не выше л. Н. Тем более эта точка лежит не выше прямой S, проходящей через точки $(i_{S-1}, \varkappa_{i_{S-1}})$, $(i_S, \varkappa_{i_S})$, лежащие на л. Н. Пусть (τ, y) — координаты точки, лежащей на прямой W, и имеющей абсциссу τ. Из сказанного следует, что $\varkappa_\tau \leqslant y$. Из (6) видно, что α_S равно тангенсу угла, образованного прямой W с осью абсцисс. Поэтому $(\tau < i_S)$, $\alpha_S = (\varkappa_{i_S} - \varkappa_{i_{S-1}})/(i_S - i_{S-1}) = (\varkappa_{i_S} - y)/(i_S - \tau) \leqslant (\varkappa_{i_S} - \varkappa_\tau)/(i_S - \tau)$. Следовательно,

$$\alpha_S (i_S - \tau) + \varkappa_\tau - \varkappa_{i_S} = (i_S - \tau)\left(\alpha_S - \frac{\varkappa_{i_S} - \varkappa_\tau}{i_S - \tau}\right) \leqslant 0. \qquad (9)$$

Пусть P, Q — какие-то многочлены от $f(z)$ над полем M_R. Скажем, что $Q \in D(P)$, если многочлен P делится на многочлен Q над полем M_R. Скажем, что наибольший общий делитель многочленов $P_0, \ldots, P_m$ равен единице, если из того, что $Q \in D(P_0), \ldots, Q \in D(P_m)$ следует, что Q — многочлен нулевой степени относительно $f(z)$ над полем M_R, и будем записывать

$$< P_0, \ldots, P_m > = 1. \qquad (10)$$

Положим $T(r, a) = 0(\Sigma T(r, a_{ij}))$, где сумма берется по всем a_{ij} из (1), (4). В [3] дана оценка роста совокупности всех m ветвей алгеброидной функции $u^*(z)$:

Теорема А [3]. *Пусть алгеброидная функция $u^*(z)$ определяется уравнением (1), коэффициенты P_j которого задаются формулой (4) с условием (10). Тогда $T(r, u) = \varkappa_{i_p} T(r, f) + T(r, a)$.*

Теорема В [3]. *Пусть у мероморфной кривой $G = (P_0, \ldots, P_m)$ компоненты заданы формулой (4) с условием (10). Тогда $T(r, G) = \varkappa_{i_p} T(r, f) + T(r, a)$.*

Будет доказана

Теорема 2. *Пусть алгеброидная функция $u^*(z)$ определяется уравнением (1), коэффициенты которого задаются формулами (4). Пусть $< P_0, P_1 > = 1$ (например, $P_0 \equiv 1$). Тогда $T(r, u_1) = \max(\varkappa_0 + \alpha_1, \varkappa_0) \cdot T(r, f) + T(r, a)$; $T(r, u_j) = \alpha_k T(r, f) + T(r, a)$, $i_{k-1} < j \leqslant i_k$, $2 \leqslant j \leqslant i_p$; $T(r, u_j) = T(r, a)$, $i_p < j \leqslant m$, где α_k, i_p определены в (6), (5).*

Доказательство теоремы 1. По теореме Виета $(1 \leqslant j \leqslant m)$ для корней уравнения (1) имеем

$$P_j/P_0 = (-1)^j (u_1^* \ldots u_j^* + \ldots + u_{m-j+1}^* \ldots u_m^*). \qquad (11)$$

Так как $u = u_1^*(z)$ есть решение (1), то после простого преобразования (1) получаем $(j = j(z),\ 1 \leqslant j \leqslant m)$

$$|P_0 u_1^m(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |P_k| u_1^{m-k}(z) \leqslant m |P_j| u_1^{m-j}(z),$$

откуда следует $u_1^j(z) \leqslant m |P_j(z)/P_0(z)|$, $j = j(z)$, или

$$u_1(z) \leqslant m \max |P_j(z)/P_0(z)|^{1/j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \qquad (12)$$

Из (11) и (2) после простого преобразования следует, что для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, выполняется $|P_j/P_0| \leqslant C_m^j U_1^j$, откуда, учитывая (12), получаем для всех $z \in \boldsymbol{C}$, $(C_1 = \max C_m^j)$

$$u_1 < m \max |P_j/P_0|^{1/j} < mc_1 u_1, \ 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{13}$$

Все части системы неравенств (13) возведем в степень $m!$, получим

$$U_1^{m!} < m^{m!} \max |P_j/P_0|^{m!/j} < (mc_1)^{m!} u_1^{m!}. \tag{14}$$

Обозначим через $n(z_0, \varphi)$, $\varphi \in M_R$ величину, равную порядку полюса функции $\varphi(z)$ в точке z_0 или 0, если $\varphi(z_0) \neq \infty$. Из (14) следует оценка порядка полюса $u_1(z)$ в точке z_0;

$$m! n(z_0, u_1) \leqslant \max n(z_0 [P_j/P_0]^{m!/j}) \leqslant m! n(z_0, u_1).$$

Отсюда, учитывая (14), определение $T(r, u_1)$ и определение неванлинновской характеристики $T(r, G_1)$ (см. [3, с. 101, 102]) мероморфной кривой G_1, следует утверждение теоремы.

Пусть теперь в уравнении (1) коэффициенты P_j определяются формулами (4). В дальнейшем через c будем обозначать

$$c = 4m \max(\varkappa_j + 1) \max C_m^j, \ 0 \leqslant j \leqslant m. \tag{15}$$

Положим

$$B = B(z) = c \max_{i,j,s,t} |a_{ij}(z)/a_{st}(z)| > 1,$$

$$\nu = (8B^m)^{-1}, \ \beta = \min(\alpha_s - \alpha_{s+1}) > 0, \tag{16}$$

где α_s определены в (6). Пусть $\sigma = \sigma(r)$ — множество значений θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, для которых

$$|f(re^{i\theta})| > \max[B, (8Bc)^{(m^2+1)/\beta}] > 1. \tag{17}$$

Лемма. *На множестве σ для решений уравнения (1) с коэффициентами P_j, определенными в (4), выполняются неравенства*

$$\nu |f|^{\alpha_k} \leqslant u_\tau \leqslant B |f|^{\alpha_k}, \tag{18}$$

если $i_{k-1} + 1 \leqslant \tau \leqslant i_k$, $1 \leqslant k \leqslant t$, где α_k определены в (6).

Доказательство. Пусть $\varkappa = \max(\varkappa_j + 1)$, $0 \leqslant j \leqslant m$. Из (16), (17) следует, что если $\theta \in \sigma$, то $|a_{1j} a_{0j}^{-1} f^{-1}| < (2\varkappa)^{-1}$; ...; $|a_{\varkappa_j j} a_{0j}^{-1} f^{-\varkappa_j}| < (2\varkappa)^{-1}$. Поэтому, учитывая (2), имеем

$$|P_j| = |a_{0j} f^{\varkappa_j} (1 + a_{1j} a_{0j}^{-1} f^{-1} + \ldots + a_{\varkappa_j j} a_{0j}^{-1} f^{-\varkappa_j})| <$$

$$< |a_{0j} f^{\varkappa_j}| [1 + (2\varkappa)^{-1} + \ldots + (2\varkappa)^{-1}] < 2 |a_{0j} f^{\varkappa_j}|, \tag{19}$$

аналогично

$$|P_j| \geqslant |a_{0j} f^{\varkappa_j}| (1 - |a_{1j} a_{0j}^{-1} f^{-1}| - \ldots - |a_{\varkappa_j j} a_{0j}^{-1} f^{-\varkappa_j}|) >$$

$$> |a_{0j} f^{\varkappa_j}| (1 - (2\varkappa)^{-1} - \ldots - (2\varkappa)^{-1}) \geqslant 2^{-1} |a_{0j} f^{\varkappa_j}|. \tag{20}$$

Из (19), (20) следует

$$2^{-1} |P_j/a_{0j}| < |f|^{\varkappa_j} < 2 |P_j/a_{0j}|, \ 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{21}$$

Поэтому $(0 \leqslant j,\ k \leqslant m)$

$$4^{-1}\left|\frac{P_j a_{0k}}{P_k a_{0j}}\right| < |f|^{\varkappa_j - \varkappa_k} < 4\left|\frac{P_j a_{0k}}{P_k a_{0j}}\right|, \tag{22}$$

$$4^{-1}\left|\frac{a_{0j}}{a_{0k}} f^{\varkappa_j - \varkappa_k}\right| < \left|\frac{P_j}{P_k}\right| < 4\left|\frac{a_{0j}}{a_{0k}} f^{\varkappa_j - \varkappa_k}\right|. \tag{23}$$

Из (13), (23), (16), (6) следует, что на множестве σ

$$u_1 < 4m \max\left|\frac{a_{0j}}{a_{00}}\right|^{1/j} |f|^{(\varkappa_j - \varkappa_0)/j} < B|f|^{\alpha_1}, \tag{24}$$

$$u_1 > C^{-1}4^{-1} \max\left|\frac{a_{0j}}{a_{00}}\right|^{1/j} |f|^{(\varkappa_j - \varkappa_0)/j} > \nu|f|^{\alpha_1}, \tag{25}$$

т. е. для u_1 лемма выполняется. Предположим, что для всех $\tau \leqslant j-1$, $1 \leqslant j-1 < m$ выполняется (18); покажем, что (18) выполняется и для $\tau = j$. Пусть $i_s + 1 \leqslant j \leqslant i_{s+1}$. Надо показать, что

$$\nu|f|^{\alpha_{s+1}} \leqslant u_j \leqslant B|f|^{\alpha_{s+1}}. \tag{26}$$

Пусть для u_j существует $z = re^{i\theta}$, $\theta \in \sigma$, что $u_j < \nu|f|^{\alpha_{s+1}}$. Ветви $u_1, \ldots, u_{i_{s+1}}$ разобьем на группы: $\{u_1, \ldots, u_{i_s}\}$, $\{u_{i_s+1}, \ldots, u_{j-1}\}$, $\{u_j, \ldots, u_{i_{s+1}}\}$. По предположению ветви первых двух групп удовлетворяют (18). Из (2) и неравенства $u_j < \nu|f|^{\alpha_{s+1}}$ следует, что для третьей группы $u_\tau < \nu|f|^{\alpha_{s+1}}$, $\tau \geqslant j$. Учитывая (2), (11), (16), (22), получим

$$|P_{i_{s+1}}/P_0| = |u_1^* \ldots u_{i_{s+1}}^* + \ldots| < c|u_1^* \ldots u_{i_{s+1}}^*| <$$
$$< c\,\Pi_{k=1}^{s}(B|f|^{\alpha_k})^{i_k - i_{k-1}}(B|f|^{\alpha_{s+1}})^{j-i_s-1}(\nu|f|^{\alpha_{s+1}})^{i_{s+1}-j+1} <$$
$$< cB^{j-1}\nu|f|^{\varkappa_{i_{s+1}} - \varkappa_0} < cB^{j-1}\nu 4\left|\frac{P_{i_{s+1}} a_{00}}{P_0 a_{0i_{s+1}}}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{P_{i_{s+1}}}{P_0}\right|.$$

Получили противоречие. Итак, для u_j первое из неравенств (18) верно.

Если $i_s < j-1$, то по предположению $B|f|^{\alpha_{s+1}} \geqslant u_{j-1} \geqslant u_j$, следовательно, для u_j в этом случае (18) доказано. Пусть $i_s + 1 = j$. Предположим, что $\nu|f|^{\alpha_s} \leqslant u_{i_s+1}$. Пусть k, $i_s + 2 \leqslant k$ — наименьший номер, для которого $u_{k-1} > cu_k$ (если указанного k нет, то $\nu|f|^{\alpha_s} < c^m u_\tau$, $i_s < \tau \leqslant m$, и тогда аналогично (27) рассматривают неравенство $|4a_{0m}a_{00}^{-1}||f|^{\varkappa_m - \varkappa_0} \geqslant |P_m/P_0| = u_1 \ldots u_m \geqslant \ldots$). Тогда $\nu|f|^{\alpha_s} \leqslant u_{i_s+1}$; $u_{i_s+1} \leqslant cu_{i_s+2}$; $\ldots$; $u_{k-2} \leqslant cu_{k-1}$; $u_{k-1} > cu_k$. Следовательно, $\nu|f|^{\alpha_s} < c^m u_\tau$; $i_s + 1 \leqslant \tau \leqslant k-1$; $u_{k-1} > cu_k$. Учитывая (23), (11), (2), (16), (6), получаем

$$4|a_{0,k-1}a_{00}^{-1}||f|^{\varkappa_{k-1} - \varkappa_0} \geqslant |P_{k-1}/P_0| \geqslant$$

$$\geqslant u_1 \ldots u_{k-1}\left(1-\frac{u_1 \ldots u_{k-2}u_k}{u_1 \ldots u_{k-2}u_{k-1}} - \quad - \frac{u_{m-k+2} \ldots u_m}{u_1 \ldots u_{k-1}}\right) >$$

$$> u_1 \ldots u_{k-1}\left(1-\frac{1}{c}- \ldots -\frac{1}{c}\right) > \frac{1}{2}u_1 \ldots u_{k-1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\Pi_{\tau=1}^{s}\left(\nu|f|^{\alpha_\tau}\right)^{i_\tau - i_{\tau-1}}\left(c^{-m}\nu|f|^{\alpha_s}\right)^{k-1-i_s} >$$

$$> \nu^{k-1}c^{-m^2}|f|^{\varkappa_{i_s}-\varkappa_0+\alpha_s(k-1-i_s)}, \tag{27}$$

или, учитывая (8), неравенство (27) можно переписать так:

$$4|a_{0,k-1}a_{00}^{-1}|\nu^{1-k}c^{m^2} > |f|^{\varkappa_{i_s}-\varkappa_{k-1}+\alpha_s(k-1-i_s)} \geqslant |f|^{\alpha_s-\alpha_{s+1}},$$

откуда, учитывая (16), имеем $(8Bc)^{(m^2+1)/\beta)} > |f|$, что противоречит (17). Поэтому $u_{i_s+1} < \nu|f|^{\alpha_s}$.

Значение $\overset{*}{u}_{i_s+1}$ является решением (1). Подставляя $u = \overset{*}{u}_{i_s+1}$ в (1), после простого преобразования получим

$$D = \left|P_{i_s}u^{m-i_s}\right|\left(1-\sum_{\tau=0}^{i_s-1}\left|u^{i_s-\tau}P_\tau/P_{i_s}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i_s+1}^{m}|u^{m-\tau}P_\tau| \leqslant m|u^{m-k}P_k|;\ k=k(z);\ i_s+1 \leqslant k. \tag{28}$$

Но $|u| = u_{i_s+1} < \nu|f|^{\alpha_s}$. Учитывая (23), получаем $(\tau \leqslant i_s - 1)$

$$\left|u^{i_s-\tau}P_\tau/P_{i_s}\right| < \left(\nu|f|^{\alpha_s}\right)^{i_s-\tau}4|a_{0\tau}/a_{0i_s}||f|^{\varkappa_\tau-\varkappa_{i_s}} <$$

$$< (2c)^{-1}|f|^{\alpha_s(i_s-\tau)+\varkappa_\tau-\varkappa_{i_s}} < 1/2c.$$

Последнее неравенство следует из (9) и того, что $|f| > 1$. Поэтому из (28) получаем $D > \left|P_{i_s}u^{m-i_s}\right|(1-(2c)^{-1}- \ldots -(2c)^{-1}) > 2^{-1}\left|P_{i_s}u^{m-i_s}\right|$. Окончательно из (28):

$$2^{-1}\left|P_{i_s}u^{m-i_s}\right| < m|u^{m-k}P_k|,\ k=k(z),\ i_s+1 \leqslant k. \tag{29}$$

Из (29), (23), (16), (6) следует

$$u_{i_s+1} < 2m\left|P_k/P_{i_s}\right|^{1/(k-i_s)} < B|f|^{\alpha_{s+1}}.$$

Соотношение (18) доказано и для $\tau = j = i_s + 1$.

Доказательство теоремы 2. Скажем, что $z \in \Delta_1$ (соответственно Δ_2), если $z = re^{i\theta}$, $\theta \in \sigma(r)$ (соответственно $\theta \in [0, 2\pi]\setminus\sigma)(r)$). Пусть $n_1(z_0, \varphi)$ (соответственно $n_2(z_0, \varphi)$) — величина, равная порядку полюса функции φ в точке z_0, если $z_0 \in \Delta_1$ (соответственно $z_0 \in \Delta_2$) и равная 0, если $z_0 \in \Delta_2$ (соответственно $z_0 \in \Delta_1$). Далее, пусть $n_j(r, \varphi) = \sum_{|z| \leqslant r} n_j(z, \varphi)$, $j = 1, 2$. Очевидно, $n_1(r, \varphi) + n_2(r, \varphi) = n(r, \varphi)$. Исходя из $n_1(r, \varphi)$ и $n_2(r, \varphi)$ вводятся величины $N_1(r, \varphi)$ и $N_2(r, \varphi)$, аналогичные неванлинновской характеристике $N(r, \varphi)$. Пусть $0 \leqslant j \leqslant i_p$, $i_{k-1} < j \leqslant i_k$. Из леммы и свойств $f(z)$ на множестве Δ_2 следует

$$2\pi m(r, u_j) = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} = \int_{\Delta_1} \ln^+ |f|^{\alpha_k} d\theta + 0\left(\int_{\Delta_1} [\ln^+ B + \ln^+ \nu^{-1}]\, d\theta\right) +$$

$$+ \int_{\Delta_2} \ln^+ u_j d\theta = 2\pi\alpha_k m(r, f) - \alpha_k \int_{\Delta_2} \ln^+ |f|\, d\theta +$$

$$+ \int_{\Delta_2} \ln u_j d\theta + T(r, a) = 2\pi\alpha_k m(r, f) + \int_{\Delta_2} \ln^+ u_j d\theta + T(r, a). \quad (30)$$

Из леммы и свойств $f(z)$ при $z \in \Delta_2$ получаем

$$N(r, u_j) = N_1(r, u_j) + N_2(r, u_j) = \alpha_k N(r, f) - \alpha_k N_2(r, f) +$$

$$+ T(r, a) + N_2(r, u_j) = \alpha_k N(r, f) + N_2(r, u_j) + T(r, a). \quad (31)$$

Из (30), (31) получаем

$$T(r, u_j) = \alpha_k T(r, f) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2} \ln^+ u_j d\theta + N_2(r, u_j) + T(r, a). \quad (32)$$

Умножим все компоненты вектора G_1 (3) на $P_0^{m!}$, получим мероморфную кривую G_2, $G_2 \sim G_1$ (см. [3, с. 102])

$$G_2 = \left\{P_0^{m!};\ P_1^{m!};\ P_2^{\frac{m!}{2}} P_0^{\frac{m!}{2}};\ \ldots;\ P_m^{\frac{m!}{m}} P_0^{m!\left(1-\frac{1}{m}\right)}\right\}.$$

По условию $<P_0, P_1> = 1$, поэтому для G_2 выполняются все условия теоремы B, и учитывая теорему 1, имеем

$$m! T(r, u_1) = T(r, G_1) + 0(1) = T(r, G_2) + 0(1) =$$

$$= m! \max\left(\varkappa_0 + \frac{\varkappa_j - \varkappa_0}{j},\ \varkappa_0\right) T(r, f) + T(r, a),$$

откуда, учитывая определение α_1, получаем

$$T(r, u_1) = \max(\varkappa_0,\ \varkappa_0 + \alpha_1)\, T(r, f) + T(r, a). \quad (33)$$

Пусть сначала $i_p > 0$, тогда $\alpha_1 > 0$. Из теоремы A, (33), (32), леммы и определения α_1 имеем

$$\varkappa_{i_p} T(r, f) + T(r, a) = T(r, u) = \sum_{j=1}^{m} T(r, u_j) = T(r, u_1) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{i_1} + \sum_{j=i_1+1}^{i_p} + \sum_{j=i_p+1}^{m} = (\varkappa_0 + \alpha_1)\, T(r, f) +$$

$$+ (i_1 - 1)\,\alpha_1 T(r, f) + (\varkappa_{i_p} - \varkappa_{i_1})\, T(r, f) + \sum_{j=i_p+1}^{m} T(r, u_j) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{i_p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2} \ln^+ u_j d\theta + N_2(r, u_j)\right) + T(r, a) = \varkappa_{i_p} T(r, f) +$$

$$+ T(r, a) + \left[\sum_{j=2}^{i_p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_2} \ln^+ u_j d\theta + N_2(r, u_j)\right) +\right.$$

$$+ \sum_{i=i_p+1}^{m} T(r, u_i)\Big]. \tag{34}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках последнего из равенств (34), неотрицательно, поэтому, сравнивая начало и конец (34), получаем

$$\sum_{j=2}^{i_p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_2}\ln^+ u_j d\theta + N_2(r, u_j)\right) + \sum_{j=i_p+1}^{m} T(r, u_j) = T(r, a).$$

Отсюда и из (32) следует утверждение теоремы. Случай $i_p = 0$ (тогда $\alpha_1 \leqslant 0$) доказывается аналогично.

Автор благодарит А. А. Гольдберга за руководство работой.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 592 с. 2. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений. — В кн.: Виттих «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям». М., Физматгиз, 1960. 319 с. 3. *Мохонько А. З.* О неванлинновских характеристиках для одного класса мероморфных кривых. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1976, вып. 25, с. 95—105. 4. *Valiron G.* Sur la derivee des bonctions algebroïdes. — Bull. Soc. math. France, 1931, vol. 59, N 1—2, p. 17—39.

Поступила 24 августа 1977 г.