УДК 517.39+517.91 *Г. Н. ЖОЛКЕВИЧ*

О КОГОМОЛОГИЯХ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

1. **Введение.** Статья посвящена доказательству эквивалентности свойств аменабельности и инъективности для произвольных алгебр фон Неймана. Эта задача была полностью решена А. Конном [1] для случая алгебр фон Неймана с сепарабельным преддвойственным пространством. Покажем, что она может быть редуцирована к случаю, рассмотренному в работе [1] для конечных и полуконечных алгебр фон Неймана. Теория двойственности Такесаки [2] позволяет решить задачу и для алгебр III. Докажем, что свойство инъективности для алгебры фон Неймана влечет аменабельность, поскольку импликация ,,аменабельность влечет инъективность" доказана в работе [1] без ограничений на преддвойственное пространство алгебры фон Неймана. 2. **Основные определения и обозначения.** Напомним, что нормальным дуальным банаховым бимодулем над алгеброй фон Неймана M называется банахово пространство X, сопряженное к некоторому банахову пространству X_*, являющееся M — бимодулем и удовлетворяющее свойствам: 1) $\|x\xi y\| \leqslant K\|x\|\,\|y\|\,\|\xi\|$, $(x, y \in M, \xi \in X)$; 2) операторы $\xi \to x\xi$, $\xi \to \xi X \sigma (X, X_*)$ непрерывны; 3) функционалы вида $< \eta, x\xi >$, $< \eta, \xi x >$ на M, где $\eta \in X_*$, $\xi \in X$ нормальны.

Нормальным дифференцированием на M со значениями в дуальном нормальном банаховом M — бимодуле X называется линейное отображение $D: M \to X$, слабо — $\sigma (X, X_*)$ — непрерывное, которое удовлетворяет условию $D(xy) = D(x)\,y + xD(y)$.

Нормальное дифференцирование D называется внутренним, если существует такое $\xi \in X$, что $D(x) = x\xi - \xi x$.

Алгебра фон Неймана называется аменабельной, если для любого нормального дуального банахова M-бимодуля X все дифференцирования M со значениями в X внутренние.

3. **Аменабельные группы и алгебры фон Неймана.** В этой части работы будут доказаны три леммы, которые показывают связь между понятиями аменабельности для групп и алгебр фон Неймана.

Лемма 3.1. Пусть M-алгебра фон Неймана, G-аменабельная подгруппа унитарной группы M такая, что $G'' = M$, тогда M аменабельна.

Доказательство. Пусть X — произвольный дуальный нормальный банахов M-бимодуль, D — нормальное дифференцирование в X.

Очевидно, что $u^*D(u) \in L^\infty(G, X)$ — пространству ограниченных X-значных функций на G, $u \in G$. Применяя μ лемму 3.3 из [3] к равенству $w(uw)^*D(uw) = u^*D(u)w + D(w)$, где u, $w \in G$, получим $w\xi = \xi w + D(w)$, $\xi = \mu(u^*D(u))$.

Поскольку $G'' = M$, получаем, что $D(x) = x\xi - \xi x$ для любого $x \in M$, т. е. M аменабельна.

Лемма 3.2. Пусть N-аменабельная алгебра фон Неймана, G — аменабельная группа, действующая на N автоморфизмами, тогда $M = W^*(NG)$ аменабельна.

Доказательство. Пусть X произвольный дуальный нормальный M-бимодуль, D-нормальное дифференцирование из M в X. Поскольку N аменабельна, то можно считать, что $D|N = 0$. Построим функцию $\varphi \in l^\infty(G, X): \varphi(g) = \lambda_g^* D(\lambda_g)$ и обозначим $\xi = \mu(\varphi)$.

Если $y \in N$, то $y\lambda_g^* D(\lambda_g) = \lambda_g^*(\lambda_g y \lambda_g^* D(\lambda_g)) = \lambda_g^*[\lambda_g y \lambda_g^* \cdot D(\lambda_g) + D(\lambda_g y \lambda_g^*)\lambda_g] = \lambda_g^* D(\lambda_g y) = \lambda_g^* D(\lambda_g) y \cdot y\varphi(g) = \varphi(g) y$ **(1)**. Пусть $h \in G$, тогда $\lambda_h^* \varphi(g) = \lambda_h^* \lambda_g^* D(\lambda_g) = \lambda_{gh}^* D(\lambda_{gh} \lambda_h^*) = \lambda_{gh}^* D(\lambda_{gh}) \lambda_h^* + D(\lambda_h^*)\ \lambda_h^* \varphi(g) = \varphi(gh)\lambda_h^* + D(\lambda_h^*)$. **(2)**

Применяя μ к (1) и (2), получим $y\xi = \xi y$ и $D(\lambda_h^*) = \lambda_h^* \xi - \xi\lambda_h^*$ откуда $D(x) = x\xi - \xi x$, поскольку $M = W^*(N, (\lambda_g))$, т. е. M аменабельна.

Лемма 3.3. *Пусть M-инъективная полуконечная алгебра фон Неймана, действующая на сепарабельном гильбертовом пространстве H, тогда в унитарной группе M существует аменабельная подгруппа G такая, что $G'' = M$.*

Доказательство. В центре $Z(M)$ выберем попарно ортогональные проекторы E_k такие, что $\sum E_k = 1$, $E_1 M$ — алгебра типа II_1, $E_2 M$ — алгебра типа II_∞, $E_3 M$ — алгебра типа I_∞, $E_\kappa M$ — алгебра типа I_{n_k}, $k \geqslant 4$ [4, с. 98, 122, 240]. Очевидно, что все $E_\kappa M$ инъективны и действуют в сепарабельных пространствах $E_\kappa H$, $H = \bigoplus E_\kappa H$.

В силу [4, с. 239—240] $E_\kappa M \simeq B(H_\kappa) \bigoplus C_\kappa$ при $k \geqslant 3$, где C_κ — коммутативная алгебра фон Неймана, H_κ — гильбергово пространство размерности n_κ.

Пусть U_κ — аменабельная унитарная подгруппа $B(H_\kappa)$ такая, что $U_\kappa'' = B(H_\kappa)$, V_κ — унитарная группа G_κ, тогда $G_\kappa = \{u' \otimes u'' \mid u' \in u_\kappa,\ u \in V_\kappa\}$ порождает $E_\kappa M$ и, очевидно, аменабельна.

Рассмотрим теперь $E_1 M \simeq \int \otimes M_t d\mu(t)$ — разложение по центру. Согласно [5, теорема A], все факторы M_t инъективны, а значит [6, 7.1, 7.2, 7.5, 7.7, 7.8], гиперфинитны.

Таким образом, $E_1 M \simeq R_1 \otimes C_1$, где C_1 — коммутативная алгебра фон Неймана, R_1 — гиперфинитный фактор типа II_1 [4, с. 179].

Так как R_1 порождается аменабельной унитарной подгруппой, то и $E_1 M$ порождается некоторой аменабельной унитарной подгруппой C_1. Аналогично $E_2 M = C_2''$, где C_2 — аменабельна.

Пусть группа W_n действует в $E_\kappa H$ как G_κ при $k \leqslant n$ и как единица при $k > n$. Тогда $W_n \subset W_{n+1}$ и в силу [7, теорема 1.2.7.] $G = \bigcup W_n$ аменабельна, кроме того, $G'' = M$.

4. Аменабельность инъективных алгебр фон Неймана. В этой части будет показано, что всякая инъективная алгебра фон Неймана аменабельна. Для алгебр фон Неймана типа I это доказано в работе [3]. Поэтому мы будем проводить доказательство для алгебр типа II_1, II_∞, III.

4.1. Случай алгебр типа II_1.

Лемма 4.1.1. *Пусть M — инъективная, слабо сепарабельная алгебра фон Неймана типа II_1, тогда в унитарной группе M существует аменабельная подгруппа G такая, что $G'' = M$.*

Доказательство. Пусть $T(M)$ — множество конечных нормальных следов на M. В силу конечности M, оно отделяющее

Обозначим $T_0(M)$ отделяющее подмножество следов с попарно ортогональными носителями.

Для каждого $\tau \in T_0(M)$ обозначим π_τ — нормальное представление M, построенное по следу τ. Поскольку $T_0(M)$ отделяющее, то алгебра $N = \bigoplus_{\tau \in T_0(M)} \pi_\tau(M)$ изоморфна M.

Каждая из алгебр $\pi_\tau(M)$ действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H_τ и в силу леммы 3.3 порождается аменабельной подгруппой G_τ своей унитарной группы. Рассмотрим Λ — множество конечных подмножеств $T_0(M)$ и для каждого $F \in \Lambda$ построим группу W_F в N, которая действует как G_τ в H_τ при $\tau \in F$ и как единица при $\tau^- \in F$. Тогда $W = \bigcup W_F$ аменабельна [7, теорема 1.2.7] и очевидно порождает N.

Группа $G \subset M$, соответствующая W, удовлетворяет всем требованиям условия теоремы.

Теорема 4.1.2. *Пусть M — инъективная алгебра фон Неймана типа II_1, тогда M аменабельна.*

Доказательство. Рассмотрим Λ — сеть по включению всех счетных подгрупп унитарной группы M. Для каждой $G \in \Lambda$ определим $M_G = G''$. Алгебры M_G слабо сепарабельны и $M = \bigcup M_G$.

Так как M конечна и инъективна, то все M_G инъективны. По лемме 4.1.1. M_G порождается аменабельной подгруппой W_G своей унитарной группы.

Пусть X — произвольный нормальный дуальный M-бимодуль, D — нормальное дифференцирование в X. По лемме 3.1, $(D|M_G)(x) = x\xi_G - \xi_G x$, $\xi_G \in X$ и из доказательства леммы 3.1 видно, что $\|\xi_G\| \leqslant \|D\|$.

В силу $\sigma(X, X_*)$ — компактности шара в X, в $\{\xi_G\}$ существует $\sigma(X, X_*)$ — сходящаяся поднаправленность $\xi_\alpha \to \xi$, откуда $D(x) = x\xi - \xi x$, т. е. M аменабельна.

4.2. Случай алгебр типа II_∞

Теорема 4.2.1. *Пусть M — инъективная алгебра фон Неймана типа II_∞, тогда M аменабельна.*

Доказательство. В силу [4, с. 99] на M существует точный нормальный полуконечный след τ.

Пусть $N_\tau = \{x \in M \mid \tau(x^* x) < \infty\}$.

Рассмотрим Λ — сеть счетных подмножеств N_τ. Для $F \in \Lambda$ построим алгебру $M_F = (F, F^*, 1)''$. Все M_F — алгебры типа II_∞ и слабо сепарабельные, поэтому точное представление M_F, построенное по τ, действует на сепарабельном гильбертовом пространстве. Так как M полуконечна, и инъективна и M_F полуконечна, то M_F инъективна. В силу леммы 3.3., M_F порождается аменабельной подгруппой своей унитарной подгруппы. Пусть X — произвольный нормальный дуальный M-бимодуль, D — нормальное дифференцирование в X. Как и в теореме 4.1.2. $(D|M_F)(x) = x\xi_F - \xi_F x$, где $\|\xi_F\| \leqslant \|D\|$, т. е. $D(x) = x\xi - \xi x$, $x \in \bigcup M_F$, ξ — $\sigma(x, x_*)$ — предельная точка $\{\xi_F\}$. Но так как $(\bigcup M_F)'' = M$, то $D(x) = x\xi - \xi x$, т. е. M аменабельна.

4.3. Случай алгебр типа III

Теорема 4.3.1. *Пусть M — инъективная алгебра фон Неймана типа III, тогда M аменабельна.*

Доказательство: Пусть $(N, (\theta_t)_{t \in R})$ непрерывное — разложение алгебры M [2], где N — инъективная алгебра фон Неймана типа II_∞, $(\theta_t)_{t \in R}$ однопараметрическая группа автоморфизмов N. В силу теоремы 4.2.1 N аменабельна. Так как M изоморфна $W^*(N, (\theta_t)_{t \in R}$, то в силу леммы 3.2. M аменабельна.

4.4 Общий случай

Теорема 4.4.1. *Алгебра фон Неймана M аменабельна, тогда и только тогда, когда она инъективна.*

Доказательство. Аменабельность влечет инъективность — доказано в работе [1].

Пусть M инъективная алгебра фон Неймана. В силу [4, с. 98, 122] $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$, где M_1 — алгебра типа I; M_2 — алгебра типа II_1; M_3 — алгебра типа II_∞; M_4 — алгебра типа III. Все M_i инъективны, а значит, как уже доказано, аменабальны. Пусть X — нормальный дуальный банахов M-бимодуль, $E_i \in Z(M)$ — проекторы, отвечающие M_i, D — нормальное дифференцирование в X.

В силу аменабельности M_i имеем $D(E_i x) = (E_i x)\xi_i - \xi_i(E_i x)$, $i = \overline{1, 4}$. Так как D — дифференцирование, то $D(1) = 0$, т. е. $\sum_{i=1}^{4} E_i \xi_i - \sum_{i=1}^{4} \xi_i E_i$. Таким образом, $D(x) = x\xi - \xi x$, $\xi = \sum_{i=1}^{4} E_i \xi_i$, а значит, алгебра M аменабельна.

Список литературы: 1. *Connes A.* On the cohomology of operator algebras. — J. Funct. Anal., 1978, **28**, p. 248—253. 2. *Takesaki M.* Duality for crossed products and structure of von Neumann algebras of type III. — Acta Math., 1973, **131**, № 3—4, p. 249—310. 3. *Kadison R. V.* and *Ringrose J. R.* Cohomology of operator algebras, I. Type I von Neumann algebras. — Acta Math., Uppsala, 1971, **126**, p. 227—243. 4. *Dixmier J.* Les algebras d'operateurs dans L'espace hilbertien, 2-l edition.— Paris, Gauthier — Villars. 1970.— 390 p. 5. Choi M. D. and Effros E. Separable nuclear C* — algebras and injectivity. — Duke Math. J., 1976, **43**. № 2, p. 309—322. 6. Connes A. classification of injective factors. — Ann. Math., 1976, **104**, p. 73—115. 7. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах. — М.: Мир, 1973. —135 с.

Поступила в редколлегию 26. 01. 81