УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

КОНЕЧНОЗОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДИРАКА

Рассмотрим оператор Дирака

$$D\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix} \vec{y}(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные периодические с периодом π функции, принадлежащие пространству $L_2[0, \pi]$. Как известно, спектр этого оператора непрерывен и состоит из последовательности сегментов $[\mu_k^+, \mu_{k+1}^-]$, они называются зонами, разделенных лакунами (μ_k^-, μ_k^+). Функция $q(x) = -r(x) + ip(x)$ называется потенциалом. Потенциал будем называть конечнозонным, если спектр соответствующего оператора содержит конечное число зон. Заметим, что концами лакун (μ_k^-, μ_k^+) являются собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых на сегменте $[0, \pi]$ оператором D. Поэтому конечнозонность эквивалентна конечности числа простых собственных значений периодической и антипериодической краевых задач.

Целью настоящей работы является доказательство того, что любой периодический потенциал $q(x)$ может быть аппроксимирован последовательностью конечнозонных потенциалов $q_i(x)$

$$\left(\lim_{i\to\infty}\int_0^\pi [q_i(x)-q(x)]^2\,dx=0\right).$$

В работах [1, 2] доказано, что множество $W_2^n[0,\pi]$ потенциалов, имеющих n локально суммируемых с квадратом производных, взаимнооднозначно отображается на множество пар последовательностей $\{h_k(q)\}$, $\{k\pi+ih_k^*(q)\}$ таких, что $h_k(q)\geqslant 0$, $\sum_k (k^n h_k(q))^2<A_n<\infty$, а каждая из точек $\{k\pi+ih_k^*(q)\}$ лежит на одном из берегов соответствующего разреза $\operatorname{Re}\theta=k\pi$, $|\operatorname{Im}\theta|\leqslant\leqslant h_k(q)$. При этом, если $\{h_k(q)\}$ — последовательность, отвечающая потенциалу $q(x)$, то собственные значения $\{\mu_k^\pm(q)\}$ периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых оператором с этим потенциалом, находятся по формулам $\mu_k^\pm(q)=z(k\pi\pm 0)$, где $z(\theta)$ — аналитическое продолжение функции, обратной $\theta(z)$, а $\theta(z)$ — функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на область $\{\theta:\operatorname{Im}\theta>0\}\setminus\bigcup_k\{\theta:\operatorname{Re}\theta=k\pi,\ 0\leqslant\operatorname{Im}\theta\leqslant h_k(q)\}$ и нормированная условиями $\lim_{z\to\infty}(\theta(z)-\pi z)=0$, $\theta(\mu_0^+)=+0$; $\{h_k(q)\}$, $\{k\pi+ih_k^*(q)\}$ непрерывно зависят от потенциала $q(x)$ в том смысле, что если $q_i(x)\to q(x)$, то $h_k(q_i)\to h_k(q)$, $k\pi+ih_k^*(q_i)\to k\pi+ih_k^*(q)$.

Лемма. *Пусть множество описанных выше пар последовательностей $\{h_k(N)\}$, $\{k\pi+ih_k^*(N)\}$ удовлетворяет условию $\sup_N\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^n h_k(N))^2=A_n<\infty$ $(n=0,1,2\ldots)$. Тогда множество отвечающих им потенциалов $q_N(x)$ компактно.*

Доказательство. Согласно теореме III работы [2] потенциалы $q_N(x)\in W_2^\infty[0,\pi]$. Собственные значения $\{\mu_k^\pm(N)\}$ периодической и антипериодической краевых задач, а также $\{\lambda_k(N)\}$ — собственные значения задачи с краевым условием $y_1(0)=y_1(\pi)=0$, порождаемой тем же оператором D, связаны между собой формулами следов:

$$S_m(N)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{2\lambda_k(N)^m-\mu_k^-(N)^m-\mu_k^+(N)^m\}=$$

$$=[\lambda^n+C_N(\lambda)]_m+[\lambda^n+\overline{C}_N(\lambda)]_m-[\lambda^{2n}-C_N(\lambda)\,\overline{C}_N(\lambda)]_m,$$

где n — количество производных у потенциала $q_N(x)$ (в данном случае n можно выбрать произвольно), $1\leqslant m\leqslant n$, $[Q(\lambda)]_m$ — сумма m-х степеней корней многочлена $Q(\lambda)$,

$$C_N(\lambda)=i\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\lambda^{n-k}\bar{a}_{Nk}(0)(2i)^{-k},$$

а $\alpha_{Nk}(x)$ определяются из рекуррентных формул $\alpha_{N1}(x)=iq_N(x)$, $\alpha_{Nk}(x)=-\alpha'_{N\,k-1}(x)+i\bar{q}_N(x)\sum_{j=1}^{k-2}\alpha_{N\,k-j-1}(x)\,\alpha_{Nj}(x)$ (см. задачу 6, с. 95 [3]).

Пользуясь формулами для сумм m-х степеней корней полиномов и рекуррентными формулами для $\alpha_{Nk}(x)$, находим, что при $m=1$

$$S_m(N)=-p_N(0), \tag{1}$$

при $m=2$

$$S_m(N)=p_N^2(0)+r'_N(0), \tag{2}$$

при $m=3$

$$S_m(N)=-3p''_N(0)+4p_N^3(0)-12p_N(0)\,r_N^2(0)-6p_N(0)\,r'_N(0). \tag{3}$$

Так как $\mu_k^-(N)\leqslant\lambda_k(N)\leqslant\mu_k^+(N)$ [1], из леммы 2.2 работы [4] при условиях, налагаемых на $h_k(N)$, следует, что $\sup\limits_N|S_m(N)|=K_m<\infty$. Тогда из (1) и (2) сразу видно, что $p_N(0)$ и $r_N(0)$ ограничены, а так как потенциал $q_N(x+t)$ имеет те же собственные числа периодической и антипериодической краевых задач, что и потенциал $q_N(x)$, т. е. $\{\mu_k^\pm(N)\}$, то, следовательно, ограничены и $p_N(x)$, $r_N(x)$. Из (3) следует ограниченность $p''_N(x)+4p_N(x)\,r_N^2(x)$.

В работе [1] были получены асимптотические формулы для $\mu_k^\pm(N)$: $\mu_k^\pm(N)=k+\frac{1}{2\pi k}\int_0^\pi|q_N(x)|^2\,dx+o(k^{-1})$, а из работы [4] (формула (2.17) леммы 2.3) следует в силу единственности, что $\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi|q_N(x)|^2\,dx=c_1(N)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\theta(t)\,dt\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mu_k^+(N)-\mu_k^-(N))\times h_k(N)$, но, поскольку для $(\mu_k^+(N)-\mu_k^-(N))$ существует оценка $(\mu_k^+(N)-\mu_k^-(N))\leqslant\frac{2}{\pi}h_k(N)$ [3, лемма 3.4.4], то получаем следующее неравенство:

$$\int_0^\pi|q_N(x)|^2\,dx\leqslant\frac{4}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k^2(N)\leqslant\frac{4}{\pi}A_0, \tag{4}$$

откуда, учитывая (1), находим, что $\int_0^\pi r_N^2(x)\,dx<M$. Но

$$\int_0^\pi r_N^2(x)\,dx=\int_0^\pi\left[r_N(0)+\int_0^x r'_N(t)\,dt\right]^2dx\leqslant M,$$

откуда, пользуясь (2), выводим $r_N^2(0)+M_1r_N(0)+M_2\leqslant 0$, где M_1 и M_2 от N не зависят. Таким образом, мы получили ограниченность $r_N(0)$, а значит и $r_N(x)$. Но тогда из (3) следует ограниченность $p''_N(x)$, а отсюда и $p'_N(0)$ $(p'_N(x))$.

Итак, $\{p_N(x)\}$ и $\{r_N(x)\}$ равномерно по N ограничены вместе со своими первыми производными, следовательно, они компактны в C, а значит и в L_2.

Докажем основное утверждение.

Теорема. *Для любого потенциала $q(x) \in L_2[0, \pi]$ существует последовательность конечнозонных потенциалов $q_i(x)$ таких, что*

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^\pi [q_i(x) - q(x)]^2\, dx = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ можно аппроксимировать последовательностью бесконечнодифференцируемых потенциалов. Таким образом, достаточно убедиться в справедливости теоремы для бесконечнодифференцируемого потенциала.

Пусть $q(x) \in W_2^\infty[0, \pi]$. Тогда согласно теореме 3 работы [2] существует и при том только одна пара последовательностей $\{h_k\}$ и $\{k\pi + ih_k^*\}$, по которой однозначно восстанавливается и сам потенциал и $\{\mu_k^\pm\}$ — собственные значения периодической и антипериодической краевых задач, порожденных соответствующим оператором Дирака. Причем $\mu_k^\pm = z(k\pi \pm 0)$.

Поскольку потенциал бесконечнодифференцируемый, то согласно той же теореме 3 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (k^n h_k)^2 \leqslant A_n < \infty$. Рассмотрим теперь множество пар «усеченных» последовательностей $\{h_k(N)\}$, $\{k\pi + ih_k^*(N)\} : h_k(N) = h_k,\ k\pi + ih_k^*(N) = k\pi + ih_k^*$ при $|k| \leqslant N$; $h_k(N) = h_k^*(N) = 0$ при $|k| > N$. Это множество, очевидно, удовлетворяет условиям леммы, следовательно, множество восстановленных по ним потенциалов $q_N(x)$ компактно. Кроме того, из свойств отображения $z(\theta)$ (лемма 2.2 работы [4]) вытекает, что эти потенциалы конечнозонны. Компактность множества потенциалов означает наличие предельных точек $\tilde{q}_i(x)$. В силу отмеченной выше непрерывной зависимости пар последовательностей от потенциала, всем предельным потенциалам $\tilde{q}_i(x)$ отвечает та же пара, что и исходному потенциалу $q(x)$. Отсюда, благодаря единственности, следует, что все $\tilde{q}_i(x)$ совпадают с $q(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Из рекуррентных формул для $\alpha_{Nk}(x)$, из формул для сумм m-х степеней корней полинома и формулы следов можно получить ограниченность всех производных функций $q_N(x)$, и тогда соотношение (5) будет доказано также и для всех производных $q(x)$.

Список литературы: 1. *Мисюра Т. В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1978, вып. 30, с. 90—101. 2. *Мисюра Т. В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып. 32, с.   3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев, Наукова думка, 1977. 331 с. 4. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сборник, 1975. т. 97 (139), № 4, 8, с. 540—606.

Поступила 10 марта 1978 г.