УДК 517.521

В. И. МЕЛЬНИК

НЕЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТРИЦ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ МАТРИЦЫ ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ

Взвешенные средние арифметические определяются матричным преобразованием $t_n = \sum_{k=0}^{n} q_k x_k / Q_n$. Для регулярности этого преобразования достаточно, чтобы последовательность комплексных чисел (q_n) удовлетворяла условиям [1, с. 79]:

$$\text{а) } q_n \neq 0,\ Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \neq 0\ (n = 0, 1, \ldots),\ Q_n \to \infty\ (n \to \infty);$$

$$\text{б) } \sum_{k=0}^{n} |q_k| = O(Q_n). \tag{1}$$

На основе взвешенных средних арифметических построим преобразование

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) \sum_{k=0}^{n} q_k x_k / Q_n, \tag{2}$$

где числа α_n удовлетворяют условиям

$$\alpha_n = O(1),\ 1/\alpha_n = O(1). \tag{3}$$

Преобразование (2) дает интересный класс неэффективных преобразований (относительно определений см. [2]).

Теорема 1. *Пусть числа q_n и α_n, определяющие преобразование* (2). *удовлетворяют условиям* (1), (3).

а) *Если выполнено условие*

$$\arg(q_n/\alpha_n Q_{n-1}) \leqslant \sigma < \frac{\pi}{2}\ (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

то преобразование (2) *вполне неэффективно.*

б) *Если выполнены условия*

$$\lim(q_n/Q_n) = 0,\ \arg(-q_n/\alpha_n Q_{n-1}) \leqslant \sigma < \frac{\pi}{2}\ (n = 0,\ \ldots),$$

то преобразование (2) *ограниченно неэффективно, но суммирует некоторые неограниченные последовательности.*

Теорема 2. *Пусть числа q_n* и α_n, *определяющие преобразование* (2), *удовлетворяют условиям*

$$\alpha_n = \alpha,\ q_n > 0\ (n = 0,\ 1,\ \ldots),\ Q_n \to \infty\ (n \to \infty).$$

а) *Если* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *то преобразование* (2) *вполне неэффективно.*

б) *Если* $\operatorname{Re}\alpha = -\mu < 0$, $\lim(q_n/Q_n) = 0$, *то при любом* $\tau > 0$ *преобразование* (2) *неэффективно на классе последовательностей* $x_n = O(Q_n^{\mu-\tau})$, *но эффективно на классе последовательностей* $x_n = O(Q_n^{\mu+\tau})$.

в) *Если* $\operatorname{Re}\alpha = 0$, $\lim(q_n/Q_n) = 0$, *то преобразование* (2) *ограниченно эффективно.*

Теорема 2 содержит, в частности, такое следствие: для полной неэффективности преобразования (2) достаточно и при дополнительном предположении $\lim(q_n/Q_n) = 0$ необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Для вещественных последовательностей достаточность здесь установил Чакалов [3], а необходимость — Альянчич [4]. Для случая $q_n > 0$, $\alpha_n > 0$ теорему 1, *а*) нашел Давыдов [5]. Частный случай преобразования (2) при $\alpha_n = \alpha > 0$, $q_n = 1$ изучали многие авторы (см. [1, с. 135—138]). Во второй части статьи теорема 2 распространяется на верхние треугольные матричные преобразования такой же структуры, как и преобразование (2), а также для матрицы преобразования (2) находятся левосторонние обратные консервативные матрицы.

Для доказательства теоремы 1 представим y_n в виде

$$y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) t_n, \tag{4}$$

где $t_n = (q_0 x_0 + \ldots + q_n x_n)/Q_n$. Тогда $x_n = (Q_n t_n - Q_{n-1} t_{n-1})/q_n$ и

$$y_n = \left(1 + \frac{\alpha_n Q_{n-1}}{q_n}\right) t_n - \frac{\alpha_n Q_{n-1}}{q_n} t_{n-1}. \tag{5}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $\lim y_n = 0$. Рассмотрим теперь отдельные случаи теоремы 1.

а) Если $t_n \neq 0$, то из формулы (5) получим

$$\frac{t_{n-1}}{t_n} = 1 + \frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\left(1 - \frac{y_n}{t_n}\right). \tag{6}$$

Выберем $\sigma < \sigma_1 < \psi/2$. Существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\arg\left(\frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\left(1-\frac{y_n}{t_n}\right)\right)\right| \leqslant \sigma_1, \quad \left|\frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\left(1-\frac{y_n}{t_n}\right)\right| > \nu\left|\frac{q_n}{Q_{n-1}}\right|$$

($\nu > 0$ — константа) при $|y_n| < \delta(\varepsilon)$, $|t_n| \geqslant \varepsilon$. Через $n(\varepsilon)$ обозначим такой номер, что $|y_n| < \delta(\varepsilon)$ при $n > n(\varepsilon)$. Если теперь $n > n(\varepsilon)$, $|t_n| \geqslant \varepsilon$, то ввиду равенства (6) получим

$$\left|\frac{t_{n-1}}{t_n}\right| \geqslant \operatorname{Re}\left\{1+\frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\left(1-\frac{y_n}{t_n}\right)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant 1+\left|\frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\left(1-\frac{y_n}{t_n}\right)\right|\cos\sigma_1 \geqslant 1+\nu_1\left|\frac{q_n}{Q_{n-1}}\right| > 1, \tag{7}$$

где $\nu_1 > 0$ — константа. При $n-1 > n(\varepsilon)$ можно опять повторить предыдущие вычисления и получить

$$|t_{n-2}/t_{n-1}| \geqslant 1+\nu_1|q_{n-1}/Q_{n-2}|,$$

и т. д. Перемножая все неравенства (7), выписанные при значениях индекса, равных n, $n-1$, $\ldots$, $n(\varepsilon)+1$, получим

$$|t_{n(\varepsilon)}| > |t_n| \prod_{k=n(\varepsilon)+1}^{n}(1+\nu_1|q_k/Q_{k-1}|). \tag{8}$$

Хорошо известно [6, с. 290], что если $\Sigma|q_k| = \infty$, то

$$\Sigma|q_k|/(|q_0|+\ldots+|q_k|) = \infty.$$

Отсюда

$$\prod_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty}(1+\nu_1|q_k/Q_{k-1}|) \geqslant \prod_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty}(1+\nu_1|q_k|/(|q_0|+\ldots+|q_k|) = \infty.$$

Предположим теперь, что неравенство $|t_n| \geqslant \varepsilon$ выполняется для бесконечного количества номеров n. Тогда в неравенстве (8) по этим номерам перейдем к пределу и получим, что $|t_{n(\varepsilon)}| \geqslant \infty$, т. е. противоречие. Значит, неравенство $|t_n| \geqslant \varepsilon$ может быть выполнено лишь для конечного количества номеров n, т. е. $\lim t_n = 0$. Используя формулу (4) и условие (3), получаем далее, что $\lim x_n = 0$. Теорема 1, *а*) доказана.

б) Если $t_{n-1} \neq 0$, то из формулы (5) получим

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \left(1+\frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\right)^{-1}\left(1+\frac{q_n}{\alpha_n Q_{n-1}}\frac{y_n}{t_{n-1}}\right). \tag{9}$$

Предположим, что n достаточно велико и $|t_{n-1}| \geqslant \varepsilon$. Для такого n из равенства (9) найдем

$$|t_n/t_{n-1}| \geqslant (1+(1+o(1))\cos\sigma|q_n/\alpha_n Q_{n-1}|)\times$$

$$\times(1+o(|q_n/\alpha_n Q_{n-1}|)) \geqslant 1+\nu_1|q_n/Q_{n-1}| > 1 \ (\nu_1 > 0). \tag{10}$$

Следовательно, $|t_n| \geqslant \varepsilon$, и неравенство (10) можно также выписать для номера $n+1$. По индукции убеждаемся, что для любого $k \geqslant n$

$$|t_k/t_{k-1}| \geqslant 1+\nu_1|q_k/Q_{k-1}|.$$

Перемножая эти неравенства для $k=n,\ n+1,\ \ldots,\ m$, получим

$$|t_m| \geqslant |t_{n-1}| \prod_{k=n}^{m} (1+\nu_1 |q_k/Q_{k-1}|).$$

Отсюда, как и выше, следует, что $t_m \to \infty$ $(m \to \infty)$. Из уравнения (4) тогда выводим, что $\overline{\lim}\, x_m = \infty$ $(m \to \infty)$, так как при выполнении условий теоремы 1, *б*) $\overline{\lim}\, |1-\alpha_n| > 0$.

Если $x_n = O(1)$, то предположение $\underline{\lim}\, |t_n| > 0$, как выше было установлено, приводит к противоречию. Поэтому $\lim t_n = 0$, а тогда из (4) следует, что $\lim x_n = 0$, и первая часть теоремы 1, *б*) доказана.

Для доказательства второй части этой теоремы положим

$$t_n = (1 + q_n/\alpha_n Q_{n-1})^{-1}\, t_{n-1}\, (n > n_0),\ \ t_n = 1\, (n \leqslant n_0),$$

и по последовательности (t_n) единственным образом определится последовательность (x_n). Последовательности (t_n) и (x_n) имеют вид:

$$t_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} (1 + q_k/\alpha_k Q_{k-1})^{-1} \quad (n > n_0);$$

$$x_n = (1 - 1/\alpha_n) \prod_{k=n_0+1}^{n} (1 + q_k/\alpha_k Q_{k-1})^{-1} \ (n > n_0). \tag{11}$$

Последовательность (x_n) суммируется преобразованием (2) к нулю, так как $y_n = 0$ при $n > n_0$. В то же время последовательность (x_n) не ограничена, так как

$$|x_n| = |1 - 1/\alpha_n| \prod_{k=n_0+1}^{n} |1 - q_k/\alpha_k Q_{k-1} +$$

$$+ O(q_k^2/Q_{k-1}^2) \geqslant |1 - 1/\alpha_n| \prod_{k=n_0+1}^{n} (1 + \nu_1 |q_k/Q_{k-1}|).$$

Теорема 1 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 2 используем предыдущие рассуждения. Рассмотрим отдельные случаи теоремы 2.

а) Это утверждение сразу следует из теоремы 1, *а*).

б) Пусть $0 < \beta < \beta_1 < \mu = -\mathrm{Re}\,(1/\alpha)$, $\lim y_n = 0$, $\overline{\lim}\, |t_n| > 0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существует бесконечная подпоследовательность номеров n, для которых $|t_n| \geqslant \varepsilon$. Для такого n, считая его достаточно большим, из (9) найдем

$$|t_{n+1}/t_n| = |1 - q_n/\alpha Q_{n-1} + O(q_n^2/Q_{n-1}^2)| \times$$

$$\times |1 + o(q_n/Q_{n-1})| \geqslant 1 + \beta_1 q_n/Q_{n-1} > 1. \tag{12}$$

Тогда $|t_{n+1}| \geqslant |t_n| \geqslant \varepsilon$, и неравенство (12) можно выписать для номера $n+1$, и т. д. Таким образом, для любого $k \geqslant n$ справедливо неравенство (12). Перемножая все эти неравенства для $k=n,\ n+1,\ \ldots,\ m$, найдем

$$|t_m| \geqslant |t_n| \prod_{k=n}^{m-1} (1+\beta_1 q_k/Q_{k-1}).$$

Тогда

$$\ln|t_m| \geqslant \ln|t_n| + \sum_{k=n}^{m-1} \ln(1+\beta_1 q_k/Q_{k-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \ln\varepsilon + (1+o/1))\,\beta_1 \sum_{k=n}^{m-1} q_k/Q_{k-1} = \ln\varepsilon + (1+o(1))\,\beta_1 \times$$

$$\times \sum_{k=n}^{m-1} \ln(1+q_k/Q_{k-1}) = \ln\varepsilon + (1+o(1))\,\beta_1 \ln(Q_{m-1}/Q_{n-1}) =$$

$$= \ln\varepsilon + (1+o(1))\,\beta_1 \ln(Q_m/Q_n),$$

где множитель $1+o(1)$ может быть сделан как угодно близким к 1 за счет выбора достаточно большого номера n. При $m\to\infty$ находим, что $t_m \neq O\left(Q_m^{\beta}\right)$, а тогда ввиду равенства (4) $x_m \neq O\left(Q_m^{\beta}\right)$. Значит, если последовательность (x_n) суммируется преобразованием (2) и $x_n = O\left(Q_n^{\mu-\tau}\right)$, $\tau > 0$, то $\lim t_n = 0$. Тогда из (4) следует, что $\lim x_n = 0$, и первая часть теоремы 2, *б*) доказана.

Для доказательства второй части теоремы 2, *б*) рассмотрим последовательность (x_n), определенную формулой (11). Преобразование (2) суммирует эту последовательность к нулю, и одновременно

$$\ln|x_n| = O(1) - \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln|1+q_k/\alpha Q_{k-1}| =$$

$$= O(1) + (1+o(1))\,\mu \sum_{k=n_0+1}^{n} q_k/Q_{k-1} = O(1) + (1+o(1))\,\mu \ln \times$$

$$\times (Q_n/Q_{n_0}).$$

Видим, что $x_n = O\left(Q_n^{\mu+\tau}\right)$, и теорема 2, *б* полностью доказана.

в) Как было выяснено в предыдущих двух пунктах, преобразование (2) вполне неэффективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}\alpha > 0$, и прямая $\operatorname{Re}\alpha = 0$ — топологическая граница множества тех значений α, для которых преобразование (2) вполне неэффективно. По теореме Коппинга [7, теорема 11], при любом α, принадлежащем прямой $\operatorname{Re}\alpha = 0$, преобразование (2) ограниченно эффективно.

Предыдущие результаты можно распространить на верхние треугольные матричные преобразования

$$y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) \sum_{k=n}^{\infty} q_k x_k/Q_n, \tag{13}$$

где весовая последовательность (q_n) удовлетворяет условиям:

$$\text{а) } q_n \neq 0,\ Q_n = \sum_{k=n}^{\infty} q_k \neq 0\ (n = 0,\ 1,\ \ldots),\ \Sigma |q_n| < \infty;$$

$$\text{б) } \sum_{k=n}^{\infty} |q_k| = O(Q_n).$$

Не повторяя предыдущих вычислений, сформулируем только аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_n = \alpha$, $q_n > 0$ $(n = 0,\ 1,\ \ldots)$.

а) *Если* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, *то преобразование* (13) *неэффективно на классе последовательностей* $x_n = O\left(Q_n^{-\mu+\tau}\right)$, $\tau > 0$, *но эффективно на классе последовательностей* $x_n = O\left(Q_n^{-\mu-\tau}\right)$ *при* $\tau > 0$, $\mu + \tau < 1$.

б) *Если* $\operatorname{Re}\alpha < 0$ *и* $\lim (q_n/Q_n) = 0$, *то преобразование* (13) *вполне неэффективно.*

В заключение рассмотрим вопрос о существовании левосторонней обратной матрицы у матрицы A, определяющей преобразование (2). Пусть A — нормальная матрица. Известно [8, п. 35,1], что при выполнении условий теоремы 1, *а*) матрица A должна иметь двустороннюю обратную консервативную матрицу A^{-1}, а из теоремы Коппинга [7, теорема 4] следует, что при выполнении условий теоремы 1, *б*) матрица A должна иметь левостороннюю обратную консервативную матрицу. Найдем явный вид левосторонних обратных матриц.

Если $B = (b_{nk})$ — консервативная матрица, E — единичная матрица, то условие $BA = E$ приводит к уравнениям

$$b_{nk}\left(\alpha_k + (1 - \alpha_k)\frac{q_k}{Q_k}\right) + b_{n,\,k+1}(1 - \alpha_{k+1})\frac{q_k}{Q_{k+1}} + \\ + b_{n,\,k+2}(1 - \alpha_{k+2})\frac{q_k}{Q_{k+2}} = \delta_{nk}, \tag{14}$$

где $\delta_{nk} = 0$ $(k \neq n)$, $\delta_{nn} = 1$. При фиксированном n, умножая $k+1$ уравнение на q_k/q_{k+1} и вычитая его из k уравнения, получим

$$b_k = (\alpha_k + (1 - \alpha_k)\, q_k/Q_k) - b_{k+1}\alpha_{k+1}q_k/q_{k+1} = 0\ (k \neq n - 1,\ n), \tag{15}$$

$$b_{n-1}(\alpha_{n-1} + (1 - \alpha_{n-1})\, q_{n-1}/Q_{n-1}) - b_n\alpha_n q_{n-1}/q_n = -q_{n-1}/q_n, \tag{16}$$
$$b_n(\alpha_n + (1 - \alpha_n)\, q_n/Q_n) - b_{n+1}\alpha_{n+1}q_n/q_{n+1} = 1,$$

где $b_k \equiv b_{nk}$. Если выполнены условия теоремы 1, *а*), то $B = A^{-1}$ и матрица B определена однозначно: $b_k = 0$ при $k > n$, $b_n = (\alpha_n + (1 - \alpha_n)\, q_n/Q_n)^{-1}$, и т. д.

Если выполнены условия теоремы 1, *б*), то при $k > n$ из рекуррентного соотношения (15) получим

$$b_k = b_{n+1}\frac{q_k}{q_{n+1}}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_k}\prod_{j=n+1}^{k-1}\left(1 + \left(\frac{1}{\alpha_j} - 1\right)\frac{q_j}{Q_j}\right).$$

Наоборот, из этого равенства находим, что при $k > n$

$$b_k(\alpha_k + (1-\alpha_k)q_k/Q_k) + \sum_{j=k+1}^{m} b_j(1-\alpha_j)q_k/Q_j =$$

$$= \sum_{j=k}^{m}(b_j(\alpha_j + (1-\alpha_j)q_j/Q_j) - b_{j+1}\alpha_{j+1}q_j/q_{j+1})q_k/q_j +$$

$$+ b_{m+1}q_k\alpha_{m+1}/q_{m+1} = b_{m+1}q_k\alpha_{m+1}/q_{m+1} =$$

$$= b_{n+1}\frac{q_k\alpha_{n+1}}{q_{n+1}}\prod_{j=n+1}^{m}\left(1 + \left(\frac{1}{\alpha_j} - 1\right)\frac{q_j}{Q_j}\right) \to 0 \quad (m \to \infty)$$

и, следовательно, уравнение (14) выполнено при $k > n$, а тогда и при всех k, если уравнения (15), (16) удовлетворены. Поэтому при выполнении условий теоремы 1, *б*) уравнения (14) эквивалентны уравнениям (15) и (16). Следовательно, три числа b_{n-1}, b_n, b_{n+1} необходимо выбрать так, чтобы удовлетворить двум уравнениям (16), а остальные элементы b_k находятся из рекуррентного соотношения (15). При этом еще необходимо, чтобы матрица B оказалась консервативной. Если выполнены условия теоремы 2, *б*), то $b_{n,n-1}$ следует выбирать произвольно, но достаточно быстро стремящимися к нулю при $n \to \infty$, и матрица A имеет бесконечное количество левосторонних обратных консервативных матриц. Одну из них получим, выбрав $b_{n,n-1} = 0$, $b_{nn} = 1/\alpha$ и т. д.

Список литературы: 1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с. 2. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960. 471 с. 3. *Čakalov L. N.* Generalisation d'un theoreme de Mercer sur la convergence. Izvestija Math. inst. Acad. bulgare sci, 1954, vol. 1, p. 85—88. 4. *Aljančić S.* Sur le theoreme mercerien de Cakalov. Publ. inst. Math. (n. S.), 1975, vol. 19, p. 9—15. 5. *Давыдов Н. А.* Обобщение мерсеровой теоремы Кноппа—Белинфанте.— Теория функций, функц. анализ и их приложения. Харьков, 1966, вып. 3, с. 86—89. 6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М., Наука, 1970. 800 с. 7. *Copping L.* Mercerian theorems and inverse transformations. Studia Math. 1962, vol. 21, p. 177—194. 8. *Zeller K., Beekmann W.* Theorie der Limitierung — sverfahren. Berlin—Heidelberg—New Jork, Springer, 1970. 314 p.

Поступила 11 июля 1975 г.