УДК 519.24

А. А. МАЛИЦКИЙ

О СВЯЗИ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА С ПРОБЛЕМОЙ МОМЕНТОВ

1. *Постановка задачи.* Пусть рассматривается скалярный объект, координата которого S меняется во времени по закону: $S(t)=\theta^T f(t)$, где $f(t)$ — заданная непрерывная вектор-функция; θ — неизвестный вектор параметров, индекс T означает транспонирование.

С целью определения θ производятся измерения $S(t)$. По результатам этих измерений, которые представляют собой смесь $S(t)$ и случайной помехи, строится статистическая оценка θ, точность которой определяется информационной матрицей Фишера K^{-1}. Примем, что

$$K^{-1}(\xi(t))=\int_a^b \varphi(t) f(t) f^T(t)\, d\xi(t).$$

Здесь $[a, b]$ — заданный временной интервал, на котором можно располагать измерения; $\varphi(t)=\frac{1}{\sigma^2(t)}$; $\sigma^2(t)$ — заданная на $[a, b]$ непрерывная функция, описывающая изменение во времени дисперсии ошибки измерений, $\xi(t)$ — функция, определяющая распределение измерений на $[a, b]$.

Задана положительная непрерывная функция $\psi(t)$ такая, что $\int_a^b \psi(t)\, d\xi(t)$ равен стоимости измерений, распределенных на $[a, b]$ в соответствии с функцией $\xi(t)$, и задан функционал $I[K^{-1}(\xi)]$, характеризующий точность оценки θ.

Требуется в классе D неубывающих функций найти такую функцию $\xi^*(t)$, что $I[K^{-1}(\xi^*)] = \max I[K^{-1}(\xi)]$, где max берется по $\xi \in D$, удовлетворяющим условию $\int_a^b \psi(t)\, d\xi(t) = d$, где d — заданная константа.

При этом будем предполагать, что оптимальное значение критерия I является монотонно возрастающей функцией допустимой стоимости d. Это означает, что критерий должен отражать тот факт, что информация об объекте по мере накопления измерений увеличивается. Если ставится задача на минимизацию критерия I при условии, что оптимальное значение критерия есть монотонно убывающая функция допустимой стоимости d, то эта задача сводится к рассматриваемой вводом критерия $T_1 = \frac{1}{T}$. Класс критериев I, удовлетворяющих указанным условиям монотонности, обозначим через A.

2. *Основные теоремы.* Решение поставленной задачи (будем называть ее задачей 1), вообще говоря, не единственно. Пусть G — класс функций ξ, доставляющих решение задаче I. Выберем, из этого класса произвольный элемент — ξ_1. Функция ξ_1 однозначно определяет матрицу $K^{-1}(\xi_1)$ и пусть $I[\xi_1] = B$. Матрица K^{-1} в силу симметричности полностью определяется вектором, имеющим не более, чем $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ компонент. Обозначим этот вектор через $y(\xi)$ и рассмотрим задачу отыскания такой функции $\xi_2(t)$, что

$$\int_a^b \psi(t)\, d\xi_2(t) = \min \int_a^b \psi(t)\, d\xi(t),$$

где min берется по $\xi \in D$, удовлетворяющим условию $y_2 = y_1$, где $y_1 = y(\xi_1)$, $y_2 = y(\xi_2)$.

Эту задачу будем называть задачей II, двойственной по отношению к соответствующей задаче I.

Задачи, двойственные по отношению к задачам планирования эксперимента, изучались, например, в [1, 5]. Однако при этом в качестве двойственных задач рассматривались задачи, отличные от задачи II.

Теорема 1. *Если $I \in A$, то функция $\xi_1(t)$, являющаяся решением задачи I, является также решением двойственной задачи II.*

Доказательство. Тот факт, что $I[\xi_1] = I[\xi_2]$ очевиден. Поэтому достаточно показать, что

$$\int_a^b \psi(t)\, d\xi_1(t) = \int_a^b \psi(t)\, d\xi_2(t) = d.$$

Докажем от противного. Пусть оказалось, что $\int_a^b \psi(t)\, d\xi_2(t) = d_1 > d$. Это означает, что значение вектора $y = y_1 = y_2$ не может быть достигнуто при стоимости меньшей, чем d, что противоречит решению задачи I. Пусть, наоборот, оказалось, что $d_1 < d$. Тогда, поскольку значение $y = y_1 = y_2$ достигается при стоимости $d_1 < d$, то, следовательно, и значение критерия $I = B$ достигается при стоимости $d_1 < d$. В силу монотонности критерия это означает, что при стоимости, равной d, можно получить значение критерия большее, чем B, что также противоречит решению задачи I. Итак, $d_1 = d$, т. е. функция $\xi_1(t)$ есть решение задачи II. Так как функция $\xi_1(t)$ выбиралась из G произвольно, то любое решение задачи I может быть получено как решение двойственной задачи II.

Из теоремы 1 следует, что вместо решения задачи I можно решать задачу II. Нас будет интересовать замена задачи I задачей II при неизвестном векторе y и, таким образом, речь будет идти об изучении тех свойств решений задачи II (а, значит, и решений задачи I), которые не зависят от конкретных значений вектора y, а, следовательно, и от критерия оптимальности, если только он принадлежит классу A.

Введем вектор

$$g^T(t) = \{f_0^2(t), \ldots, f_i(t) f_j(t), \ldots, f_n^2(t)\}, \; j > i.$$

Пусть $m+1$ компоненты этого вектора линейно независимы ($m \geqslant n$). Выделим их в вектор $z(t)$; $(m+1)$-мерный вектор

$$R^T = \left\{\int_a^b \varphi(t) z_0(t)\, d\xi(t), \ \ldots, \ \int_a^b \varphi(t) z_m(t)\, d\xi(t)\right\} = \{C_0, \ldots, C_m\}$$

полностью определяет матрицу $K^{-1}(\xi)$.

Сформулируем окончательно задачу II: среди функций $\xi(t) \in D$ и удовлетворяющих условию $\int_a^b \varphi(t) z(t)\, d\xi(t) = R$ найти такую функцию $\xi^*(t)$, что

$$\int_a^b \psi(t)\, d\xi^*(t) = \min \int_a^b \psi(t)\, d\xi(t).$$

Задача II есть одна из экстремальных задач проблемы моментов. Таким образом, теорема 1 устанавливает связь между задачами планирования эксперимента и проблемой моментов. Прежде чем сформулировать результаты, вытекающие из этой связи, напомним, следуя [2], некоторые определения и факты.

1. Непрерывные функции $\{u_k(t)\}_{k=0}^q$ образуют T_+-систему на $[a, b]$, если определитель

$$\Delta\begin{pmatrix} u_0 \ldots u_q \\ t_0 \ldots t_q \end{pmatrix} = \det \| u_0(t_j) \ \ldots \ u_q(t_j) \|_{j=0}^q$$

сохраняет знак $+$ при всех значениях $t_0 < \ldots < t_q$ ($a \leqslant t_0$, $t_q \leqslant b$).

2. Непрерывная функция $u_{q+1}(t)$ есть T_+-продолжение T_+-системы $\{u_k(t)\}_{k=0}^{q}$, если система $\{u_k(t)\}_{k=0}^{q+1}$ является T_+-системой на $[a, b]$.

3. Вводится совокупность B неотрицательных многочленов

$$P(t) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k u_k(t).$$

4. На B определяется функционал F равенством $F(P) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k b_k$, где $\{b_k\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел. Эта последовательность называется позитивной относительно системы функций $u_k(t)$, если $F(P) \geqslant 0$ для всех $P \in B$; строго позитивной, если $F(P) > 0$ для всех $P \in B$, $P \not\equiv 0$; сингулярно позитивной, если $F(P) \geqslant 0$ для всех $P \in B$, и найдется такой многочлен $P_0 \in B$, $P \not\equiv 0$, что $F(P) = 0$. Пусть $b_k = \int\limits_a^b u_k(t)\,d\xi(t)$, и пусть $\xi(t)$ имеет конечное число точек роста $t_1 < t_2 < \ldots < t_l$ $(a \leqslant t_1,\ t_l \leqslant b)$. Вводится в рассмотрение функция $\varepsilon(t) = 2$ при $a < t < b$ и $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$. Сумма $\sum\limits_{j-1}^{l} \varepsilon(t_j)$ называется индексом представления $b_k = \sum\limits_{j=1}^{l} \rho_j u_k(t_j)$, где $\rho_j = \xi(t_j + 0) - \xi(t_j - 0) > 0$.

5. Представление называется нижним главным, если: при $q = 2p - 1$ функция $\xi(t)$ имеет на $[a, b]$ p точек роста; все они расположены внутри $[a, b]$; при $q = 2p$ функция $\xi(t)$ имеет p точек роста внутри $[a, b]$ и в точке a. Непрерывный план эксперимента, спектр которого сосредоточен в точках роста функции $\xi(t)$, соответствующей нижнему главному представлению, будем называть главным.

Имеют место следующие факты.

Теорема I. *Для того чтоды числа b_k были обобщенными моментами, т. е. чтобы существовала по крайней мере одна функция $\xi(t)$ такая, что $\int\limits_a^b u_k(t)\,d\xi(t) = b_k$, $k = 0, q$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{b_k\}_{k=0}^{q}$ была позитивной.*

Теорема II. *Пуеть $v(b)$ — совокупность функций $\xi(t)$ таких, что*

$$\int\limits_a^b u_k(t)\,d\xi(t) = b_k, \quad k = 0, q.$$

Последовательность $\{b_k\}_{k=0}^{q}$ сингулярно позитивна в том и только в том случае, если она допускает представление индекса $\leqslant q$. В этом и только в этом случае $v(b)$ состоит из одного распределения.

Теорема III. *Если последовательность* $\{b_k\}_{k=0}^{q}$ *строго позитивна, то она допускает одно и только одно нижнее главное представление.*

Теорема IV. *Пусть* $\Omega(t)$ *есть* T_+-продолжение T_+-*системы* $\{u_k(t)\}_{k=0}^{q}$. *Тогда наименьшее значение* $\int_a^b \Omega(t)\,d\xi(t)$ *при заданных значениях* $q+1$ *моментов* $\int_a^b u_k(t)\,d\xi(t) = b_k$, $k=\overline{0,q}$ *достигается при* ξ, *задающем нижнее главное представление и только на нем.*

Теорема V. *Для того чтобы* $\int_a^b \Omega(t)\,d\xi(t)$ *достигал наименьшего значения на нижнем главном представлении последовательности* $\{b_k\}_{k=0}^{q}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал многочлен* $P(t)$ *со следующими свойствами:*

1) $P(t) \leqslant \Omega(t)$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$;

2) $P(t) = \Omega(t)$ *в точках роста нижнего главного представления.*

Перейдем к формулировке результатов.

Пусть $\{z_k(t)\}_{k=0}^{m}$ — T_+-система функций на $[a, b]$. Каждая функция $\xi(t) \in G$ однозначно определяет последовательность чисел $\{C_k\}_{k=0}^{m}$, которые являются моментами функций $\{\varphi z_k\}$ и, следовательно, (теорема 1) эта последовательность позитивна. Поскольку для строго позитивных и сингулярно позитивных последовательностей результаты различны, то выделим в G подкласс H тех решений задачи I, которым соответствуют строго позитивные последовательности и вначале сформулируем результаты, относящиеся к функциям $\xi \in H$. Разобъем H на непересекающиеся подклассы H_i такие, что все функции $\xi \in H_i$ дают одну и ту же последовательность $\{C_k(H_i)\}_{k=0}^{m}$. В свою очередь последовательность $\{C_k(H_i)\}$ однозначно определяет некоторый главный план Γ_i. Нас будут интересовать условия, при которых $\Gamma_i \in H$. При этом везде ниже будем предполагать, что $I \in A$.

Теорема 2. *Для того чтобы* $\Gamma_i \in H$, *необходимо, чтобы существовал многочлен* $P(t) = \alpha^T z(t)$ *со следующими свойствами:* $P(t) \leqslant \psi(t)\sigma^2(t)$ *при* $a \leqslant t \leqslant b$, $P(t) = \psi(t)\sigma^2(t)$ *в точках сосредоточения спектра* Γ_i, *и достаточно, чтобы такой многочлен существовал для любой строго позитивной последовательности. При этом свойство 2 должно иметь место в точках сосредоточения спектра главного плана, соответствующего выбранной последовательности.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть решение задачи I достигается на плане Γ_i. Заменим задачу I задачей II с последовательностью $R^T = \{C_k\}_{k=0}^{m}$, соответствующей Γ_i. Запишем задачу II в виде: среди функций $\xi \in D$, для которых

$$\int_a^b \varphi(t) z(t)\, d\xi(t) = \int_a^b z(t)\, d\mu(t) = R$$

найти такую функцию $\xi^*(t)$, что

$$\int_a^b \psi(t)\, d\xi^*(t) = \int_a^b \psi(t) \sigma^2(t)\, d\mu^*(t) = \int_a^b \Omega(t)\, d\mu^*(t) =$$

$$= \min \int_a^b \Omega(t)\, d\mu(t).$$

Доказательство завершается ссылкой на теорему V.

Достаточность. Заменим задачу I задачей II с неизвестным вектором $R^T = \{C_0, \ldots, C_m\}$. Функция $\xi(t)$, соответствующая вектору R, принадлежит некоторому классу H_i. По теореме V условия, сформулированные в теореме 2, достаточны для того, чтобы минимум $\int_a^b \psi(t)\, d\xi(t)$ при любом векторе R таком, что соответствующая ему функция $\xi(t) \in H$, достигался на главном плане, определяемом R, т. е. $\Gamma_i \in H$.

Теорема 3. *Пусть функция* $\psi(t) \sigma^2(t)$ *есть* T_+ — *продолжение* T_+-*системы функций* $\{z_k(t)\}_{k=0}^m$. *Тогда* $H_i = \Gamma_i$.

Доказательство очевидным образом сводится к ссылке на теорему V.

Теорема 4. *Пусть функции* $\psi(t)$, $\{\varphi(t) z_k(t)\}_{k=0}^m$ *образуют* T_+-*систему на* $[a, b]$. *Тогда* $H_i = \Gamma_i$.

Доказательство. Если функции $\psi(t)$, $\{\varphi(t) z_k(t)\}_{k=0}^m$ образуют T_+-систему, то функции $\sigma^2(t) [\psi(t), \{\varphi(t) z_k(t)\}_{k=0}^m = \sigma^2(t) \psi(t)$, $\{z_k(t)\}_{k=0}^m$ также образуют T_+-систему и теорема 4 свелась к теореме 3.

Перейдем к случаю сингулярно позитивных последовательностей.

Теорема 5. *Пусть* $\xi(t) \in G \diagdown H$. *Тогда измерения надо проводить не более, чем в* $l+1$ *точках* ($m = 2l$ или $m = 2l+1$). *При* $m = 2n$ *или* $m = 2n+1$ *измерения надо проводить ровно в* $n+1$ *точках. Если* $m = 2n$, *то в число этих точек входят и точка* $t = a$, *и точка* $t = b$, *а если* $m = 2n+1$, *то одна из них.*

Доказательство. Так как последовательность $\{C_k\}_{k=0}^m$ сингулярно позитивна, то (теорема II) она допускает только одно представление и индекс этого представления $\leqslant m$. Отсюда следует, что $\xi(t)$ имеет не более, чем $l+1$ точек роста. Если $\xi(t)$ имеет ровно $l+1$ точек роста, то при $m = 2l$ в число этих точек входит и точка $t = a$, и точка $t = b$, а при $m = 2l+1$ — одна из них. Таким образом, при $l = n$ план сосредоточен не более, чем в $n+1$ точках. С другой стороны, он не может быть сосредоточен менее, чем в $n+1$ точках, так как, если число точек измерений меньше, чем $n+1$, то по результатам этих измерений невозможно получить оценки $n+1$ параметра и, следовательно, соответствующая функция ξ не может быть решением задачи I.

Объединяя теоремы 2—5, получаем, что имеет место

Теорема 6. *Если $I \in A$ и функции $\{z_k(t)\}_{k=0}^{m}$ есть T_+-система на $[a, b]$, то при выполнении хотя бы одного из условий:*

1) $\psi(t)\sigma^2(t) = \alpha^T z(t), \ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 > 0;$

2) *функции* $\psi(t)$, $\{\varphi(t) z_k(t)\}_{k=0}^{m}$ *образуют T_+-систему на $[a, b]$;*

3) *функция $\psi(t)\sigma^2(t)$ есть T_+-продолжение T_+-системы $\{z_k(t)\}_{k=0}^{m}$, измерения надо проводить не более, чем в $l+1$ точках ($m=2l$ или $m=2l+1$). При $m=2n$ ($m=2n+1$) измерения надо проводить ровно в $n+1$ точках, причем при $m=2n$ одной из этих точек является точка a.*

По этой же схеме могут быть использованы для целей планирования эксперимента результаты, касающиеся экстремальных значений интегралов при заданных моментах в случае несвязного компакта (например, при $f^T(t) = \{t^k, \ \ldots, \ t^{k+n}\}$ система функций $z^T(t) = \{t^{2k}, \ \ldots, \ t^{2(k+n)}\}$ не является T_+-системой на $[-a, a]$, но является T_+-системой на $[-a, -\Delta] \cup [\Delta, a]$; сюда же относятся задачи, в которых моменты проведения измерений выбираются из заданного конечного множества точек) и в случае периодических T-систем. В этом случае нет необходимости накладывать условие $\varphi(t) = \mathrm{const}$, как сделано при изучении периодических систем в [3, 4].

Пример. Пусть $f_i(t) = t^i$, $i = 0, n$. Тогда

$$K_{\rho g}^{-1} = \int_a^b \varphi(t)\, t^{\rho+g} d\xi(t).$$

Следовательно, $z^T(t) = \{1, \ t, \ \ldots, \ t^{2n}\}$, т. е. $m = 2n$.

В рассматриваемом случае теорема 3 в виде $\Gamma_i \in H_i$ сохраняет силу при более слабом условии: $[\psi(t)\sigma^2(t)]^{(2n+1)} = \Omega^{(2n+1)}(t) \geqslant 0$ на $[a, b]$, что в сочетании с теоремой 6 позволяет высказать следующее предложение:

Теорема 7. *Если $f_i(t) = t^i$, $i = 0, n$ и $I \in A$, то измерения надо проводить ровно в $n+1$ точках, одна из которых совпадает с точкой $t = a$, при выполнении хотя бы одного из условий:*

1) $\psi(t)\sigma^2(t)$ есть многочлен степени не выше $2n$;

2) функции $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\ldots$, $\varphi(t)t^{2n}$ — T_+-система на $[a, b]$;

3) $[\psi(t)\sigma^2(t)]^{(2n)} \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Теорема 7 является усилением результатов, приведенных в [3, 4], где результаты устанавливаются для конкретного критерия, а именно, для D-оптимальных планов и отсутствует указание на то, что, если $I \in A$, то одна из точек измерений должна совпадать с точкой $t = a$. При формулировке же условия, аналогичного условию 3 в [3, 4] требуется, чтобы имело место неравенство $[\psi(t)\sigma^2(t)]^{(2n)} > 0$ на $[a, b]$ и дополнительно требуется, чтобы функция $\psi(t)\sigma^2(t)$ представляла собой многочлен, положительный на $[a, b]$. Отметим также, что в [3, 4] указанные утверждения сформулированы только для случая $z^T(t) = \{1, t, \ldots, t^{2n}\}$, в то время как теорема 6 верна для любой T_+-системы, например, для T_+-системы $\{1, t, t^2, e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, e^{2\alpha t}\}$, которая соответствует $f^T(t) = \{1, t, e^{\alpha t}\}$.

Список литературы: 1. *Silvey S., Titterington D.* A geometric apprroach to design theory.— Biometrika, 1973, vol. 60, p. 21—32. 2. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., Наука, 1973. 551 с. 3. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М., Наука, 1976. 567 с. 4. *Федоров В. В.* Теория оптимального эксперимента. М., Наука, 1971, с. 1—150. 5. *Малютов М. Б.* Замечание о теореме эквивалентности.— Планирование оптимальных экспериментов, М., Изд-во Москв. ун-та, 1975, вып. 48, с. 161—163.

Поступила 15 мая 1978 г.