УДК 517.9

Д. Ш. ЛУНДИНА

АСИМПТОТИКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И ГЛАДКОСТЬ ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим граничную задачу, порождаемую уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y'' + v(x)\,y = \mu y \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} a_1 y'(0, \lambda) + b_1 y'(\pi, \lambda) + a_0 y(0, \lambda) + b_0 y(\pi, \lambda) = 0 \\ d_1 y'(0, \lambda) + c_1 y'(\pi, \lambda) + d_0 y(0, \lambda) + c_0 y(\pi, \lambda) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Целью настоящей работы является установление взаимосвязи между числом производных у потенциала $v(x)$ и точностью асимптотических формул для собственных значений граничных задач (1)—(2). А именно, требуется найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять собственные значения двух краевых задач, порождаемых одним и тем же уравнением (1) для того, чтобы потенциал $v(x)$ имел n производных. Частные случаи этой задачи рассматривались в работах [1—4].

Потенциал $v(x)$ и числа a_i, b_i $(i = 0, 1)$ предполагаются комплекснозначными, так что задача (1)—(2) является несамосопряженной. Обозначим через $s(x, \lambda)$, $c(x, \lambda)$ решения уравнения 1), удовлетворяющие условиям $s(0, \lambda) = 0$, $s'(0, \lambda) = 1$, $c(0, \lambda) =$ $= 1$, $c'(0, \lambda) = 0$, и, пользуясь этими решениями как фундаментальной системо', напишем характеристическое уравнение задачи (1)—(2)

$$\begin{vmatrix} b_1 s'(\pi,\lambda)+b_0 s(\pi,\lambda)+a_1 & b_1 c'(\pi,\lambda)+b_0 c(\pi,\lambda)+a_0 \\ c_1 s'(\pi,\lambda)+c_0 s(\pi,\lambda)+d_1 & c_1 c'(\pi,\lambda)+c_0 c(\pi,\lambda)+d_0 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая этот определитель и пользуясь при этом тождеством $cs'-c's=1$, находим, что собственные значения краевой задачи (1)—(2) являются квадратами корней уравнения $I(2,4)+I(1,3)+I(1,2)c'(\pi,\lambda)+I(1,4)c(\pi,\lambda)+I(2,3)s'(\pi,\lambda)+I(4,3)s(\pi,\lambda)=0$, где через $I(j,k)$ обозначен определитель, составленный из j-го и k-го столбцов матрицы $\begin{pmatrix} a_1 b_1 a_0 b_0 \\ d_1 c_1 d_0 c_0 \end{pmatrix}$. Если в уравнении (1) $v(x)=0$, то $s(x,\lambda)\frac{\sin x\lambda}{\lambda}$, $c(x,\lambda)=\cos x\lambda$ и полученное уравнение имеет вид

$$I(2,4)+I(1,3)+I(2,1)\lambda\sin\pi\lambda+[I(1,4)+$$
$$+I(2,3)]\cos\pi\lambda+I(4,3)\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}=0.$$

Уже в этом простейшем случае правая часть характеристического уравнения не является тождественно константой, если выполнено одно из трех условий:

$$I(2,1)\neq 0; \tag{а}$$
$$I(2,1)=0,\ I(1,4)+I(2,3)\neq 0; \tag{б}$$
$$I(2,1)=0,\ I(1,4)+I(2,3)=0,\ I(4,3)\neq 0. \tag{в}$$

При этом в случае (в) будем предполагать, что $I(2,4)+I(1,3)=0$, так как в противном случае асимптотические формулы для собственных значений имеют логарифмическую добавку. Поэтому вместо условия (в) рассмотрим условие

$$I(2,1)=0,\ I(1,4)+I(2,3)=0,$$
$$I(2,4)+I(1,3)=0,\ I(3,4)\neq 0. \tag{в'}$$

Вопрос о связи между гладкостью потенциала и видом асимптотических формул для собственных значений краевых задач (1)—(2) при выполнении условия (а) был рассмотрен в работах [3, 4]. В случае разделенных граничных условий [3] (вариант (а), в котором $I(2,4)+I(1,3)=0$) оказалось, что для принадлежности потенциала $v(x)\in L_2[0,\pi]$ пространству Соболева $W_2^n[0,\pi]$ необходимо и достаточно, чтобы асимптотические формулы для собственных значений двух таких задач имели следующий вид:

$$\sqrt{\lambda_k}=k+\sum_{1<2j+1<n+2}\frac{a_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{\delta_k}{k^{n+1}},$$

$$\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\nu_k}=\sum_{1<2j+1<n+3}\frac{b_{2j+1}}{k^{2j+1}}+\frac{\beta_k}{k^{n+2}}, \qquad (3)$$

причем $\sum|\delta_k|^2<\infty$, $\sum|\beta_k|^2<\infty$.

В то же время уже в классе задач, удовлетворяющих условию (а), но таких, что $I(2, 4)+I(1, 3)\neq 0$, потенциал $v(x)$ может быть разрывным, несмотря на то что для собственных значений асимптотические формулы вида (3) верны при любом n. В этом случае основным пространством является пространство $W_2^n[-\frac{\pi}{2}, 0][0, \frac{\pi}{2}]$, в которое входят функции, сужения которых на сегменты $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ принадлежат соответственно пространствам $W_2^n[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $W_2^n[0, \frac{\pi}{2}]$. Оказалось, что если $v(x)\in W_2^n\times\times[-\frac{\pi}{2}, 0][0, \frac{\pi}{2}]$, то собственные значения таких задач делятся на две серии, для каждой из которых верны свои асимптотические формулы, причем необходимые и достаточные условия для принадлежности $v(x)\in L_2[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ пространству $W_2^n[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ аналогичны условиям (3), но выписываются отдельно для каждой серии собственных значений [4].

В настоящей работе рассмотрим те же вопросы для граничных задач, удовлетворяющих условиям (б), (в′).

Пусть $\mu_1^+, \mu_1^-, \ldots, \mu_k^+, \mu_k^-, \ldots$ — собственные значения граничной задачи (1) — (2) — (б).

Теорема 1. *Если* $v(x)\in W_2^n[-\frac{\pi}{2}, 0][0, \frac{\pi}{2}]$, *и* $I(3, 2)+I(4, 1)=1$, $I(4,2)+I(3,1)\neq\pm 1$, *то для собственных значений задачи (1) — (2) — (б) при* $k\to\infty$ *выполняются асимптотические равенства*

$$\sqrt{\mu_k^{\pm}}=2k\pm\Theta+\sum_{1<j<n+3}\frac{p_j l_j^{\pm}}{(2k\pm\Theta)\,j}-$$

$$-\frac{cl^{\pm}}{\pi i\, 2(2k\pm\Theta)]^{n+1}}\left\{t_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k\pm\Theta)t\mp\Theta\pi\pm\alpha\mp\frac{\pi}{2}(n+1)\right]\times\right.$$

$$\times[v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)]\,dt\mp\frac{1}{2k\pm\Theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k\pm\right.$$

$$\left.\pm\Theta)t\mp\Theta\pi\pm\alpha\mp\frac{\pi}{2}n\right][t_1 K[v_+^{(n)}(t), v_-^{(n)}(t)]-t_2(v_+^{(n)}(t)+$$

$$\left.+v_-^{(n)}(t)]\,dt\right\}+\frac{t_1\eta_k^{\pm}}{(2k\pm\Theta)^{n+2}}+\frac{\alpha_k^{\pm}}{(2k\pm\Theta)^{n+3}}, \qquad (4)$$

где

$$\Theta = \frac{1}{\pi i} \ln\left(-F_0 + \sqrt{F_0^2 - 1}\right), \ F_0 = I(4, 2) + I(3, 1);$$

$$v_+(t) = v(t), \quad v_-(t) = v(-t), \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$K[v_+^{(n)}(t), \ v_-^{(n)}(t)] = u_{(1)-}\left(\frac{\pi}{2}\right) v_+^{(n)}(t) - u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right) v_-^{(n)}(t) -$$

$$-\frac{2b}{\pi} t\,[v_+^{(n)}(t) - v_-^{(n)}(t)], \quad u_{(1)\pm}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_\pm(t)\,dt,$$

$$b = u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right) + u_{(1)-}\left(\frac{\pi}{2}\right) + I(3, 4); \ l^+ = (-1)^n, \quad l^- = 1,$$

$$p_1 = \frac{b}{\pi}, \ c = \frac{2}{\sqrt{F_0^2 - 1}}, \ t_1 = I(3,2) - I(4,1),$$

$$t_2 = I(3,4), \ \alpha = \arcsin\sqrt{1 - F_0^2},$$

$$\sum |\eta_k^\pm|^2 < \infty, \quad \sum |\alpha_k^\pm|^2 < \infty.$$

Доказательство. Как показано в работе [4], собственные значения $\mu_n^\pm = \lambda_n^{\pm 2}$ являются корнями уравнения

$$2F(\lambda) + B(\lambda) e^{i\lambda\pi} + B(-\lambda) e^{-i\lambda\pi} = 0, \tag{5}$$

в котором с учетом того, что $I(3, 2) + I(4, 1) + 1, \ I(1, 2) = 0,$

$$F(\lambda) = [I(4, 2) + I(3, 1)]\left(1 + \frac{\sigma_+(0, \lambda) - \sigma_+(0, -\lambda)}{2i\lambda}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\sigma_-(0, \lambda) - \sigma_-(0, -\lambda)}{2i\lambda}\right) + C(\lambda) + C(-\lambda),$$

$$C(\lambda) = \frac{\sigma_+(0, -\lambda) + \sigma_-(0, \lambda)}{4i\lambda}\left[P_+\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) P_-\left(\frac{\pi}{2}, -\lambda\right)\left(1 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{I(3, 4)}{i\lambda}\right) + P_+'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) P_-\left(\frac{\pi}{2}, -\lambda\right) \frac{I(3, 2)}{i\lambda} + P_+\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) P_-' \times$$

$$\left. \times \left(\frac{\pi}{2}, -\lambda\right) \frac{I(4, 1)}{i\lambda}\right]; \quad (6) \quad B(\lambda) = \left(1 - \frac{\sigma_+(0, -\lambda) + \sigma_-(0, -\lambda)}{2i\lambda}\right) \times$$

$$\times \left[P_+\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) P_-\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)\left(1 + \frac{I(3, 4)}{i\lambda}\right) + P_+'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) P_-\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{I(3, 2)}{i\lambda} + P_+\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) P_-'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \frac{I(4, 1)}{i\lambda}\right],$$

а выражения $P_\pm(x, \lambda), \ \sigma_\pm(x, \lambda) = \dfrac{P_\pm'(x, \lambda)}{P_\pm(x, \lambda)}$ таковы, что при любом

$e\mu = \lambda^2$ функции $y_\pm (x, \lambda) = e^{i\lambda x} P_\pm (x, \lambda)$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ являются решениями соответствующего из уравнений

$$- y''_\pm (x, \lambda) + v_\pm (x) y_\pm (x, \lambda) = \lambda^2 y_\pm (x, \lambda).$$

При этом, согласно [3],

$$P_\pm (x, \lambda) = 1 + \frac{u_{(1)\pm} (x)}{i\lambda} + \ldots + \frac{u_{(n)\pm} (x)}{(i\lambda)^n} + \frac{u_{(n+1)\pm} (x, \lambda)}{(i\lambda)^{n+1}},$$

$$u_{(1)\pm} (x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^x v_\pm (t)\, dt, \quad u_{(k)\pm} (x) = -\frac{1}{2} \int\limits_0^x L_\pm [u_{k-1}] (t)\, dt, \ k \geqslant 2,$$

$$L_\pm \equiv \frac{d^2}{dx^2} - v_\pm (x); \quad u_{(n+1)\pm} (x, \lambda) = c_{(1)\pm} (x) + \frac{c_{(2)\pm} (x)}{i\lambda} +$$

$$+ \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} \int\limits_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} v_\pm^{(n)} (t)\, dt + \frac{\eta_\pm (x, \lambda)}{i\lambda} + \frac{\varphi_\pm (x, \lambda)}{(i\lambda)^2}, \tag{7}$$

$$A_\pm (x, \lambda) = i\lambda u_{(n+1)\pm} (x, \lambda) + u'_{(n+1)\pm} (x, \lambda) =$$

$$= i\lambda \left[d_{(1)\pm} (x) + \frac{d_{(2)\pm} (x)}{i\lambda} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \int\limits_0^x e^{-2i\lambda(x-t)} v_\pm^{(n)} (t)\, dt \right] -$$

$$- \eta_\pm (x, \lambda) + \frac{\psi_\pm (x, \lambda)}{i\lambda},$$

причем функции $\eta_\pm (x, \lambda)$, $\varphi_\pm (x, \lambda)$, $\psi_\pm (x, \lambda)$ по λ принадлежат пространству Z_x^2 функций экспоненциального типа степени x, суммируемых с квадратом на вещественной оси.

Подставляя выражения (7) в формулы (6), получим

$$F (\lambda) = F_0 + F_1 \left[\frac{1}{\lambda^2}\right], \quad B (\lambda) = 1 + B_1 \left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{8}$$

где

$$F_0 = I (4, 2) + I (3, 1), \ F_1 \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_{2j}}{\lambda^{2j}} + O \left(\frac{A_{(n+1)\pm} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)}{(i\lambda)^{n+3}} \right),$$

$$B_1 \left(\frac{1}{\lambda}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{\lambda^j} + f_+ \left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) + f_- \left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right), \ b_1 = \frac{1}{i} \left[u_{(1)+} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + u_{(1)-} \left(\frac{\pi}{2}\right) + I (3, 4) \right];$$

$$f_+ \left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \frac{I (3, 2)}{(i\lambda)^{n+2}} A_{(n+1)+} \left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) \left(1 + \frac{u_{(1)-} \left(\frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda} \right) +$$

$$+\frac{u_{(n+1)+}\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)}{(i\lambda)^{n+1}}\left[I(4,1)+\frac{I(4,1)\,u_{(1)-}\left(\frac{\pi}{2}\right)+I(3,4)}{i\lambda}\right]+$$

$$+O\left(\frac{A_{(n+1)+}\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)}{(i\lambda)^{n+3}}\right);$$

$$f_-\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)=\frac{I(4,1)}{(i\lambda)^{n+2}}A_{(n+1)-}\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\left(1+\frac{u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{i\lambda}\right)+$$

$$+\frac{u_{(n+1)-}\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)}{(i\lambda)^{n+1}}\left[I(3,2)+\frac{I(3,2)\,u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right)+I(3,4)}{i\lambda}\right]+$$

$$+O\left(\frac{A_{(n+1)-}\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)}{(i\lambda)^{n+3}}\right). \tag{9}$$

Решим уравнение (5) относительно $e^{i\lambda\pi}$:

$$e^{i\lambda\pi}=\frac{\beta^{\pm}\left[1+\delta^{\pm}\beta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]}{1+B_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)},$$

где

$$\beta^{\pm}=-F_0\pm\sqrt{F_0^2-1},\ \delta^{\pm}=\frac{\pm 1}{\beta^{\pm}\sqrt{F_0^2-1}}; \tag{10}$$

$$\beta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)=-\frac{1}{2}\left[B_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)+B_1\left(-\frac{1}{\lambda}\right)+B_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_1\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right]+$$

$$+O\left(\frac{1}{\lambda^2}B_1\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ F_1\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right).$$

Логарифмируя это выражение, находим $\lambda_k^{\pm}=2k\pm\theta+\varepsilon_k^{\pm}$, где

$$\theta=\frac{1}{\pi i}\ln\beta^{+}=\frac{1}{\pi i}\ln\left(-F_0+\sqrt{F_0^2-1}\right), \tag{11}$$

$$\varepsilon_k^{\pm}=\frac{1}{\pi i}\left[\ln\left[1+\delta^{\pm}\beta\left(\frac{1}{(\lambda_k^{\pm})^2}\right)\right]-\ln\left[1+B_1\left(\frac{1}{\lambda_k^{\pm}}\right)\right]\right].$$

Так как уравнению (5) удовлетворяют значения $\lambda=\pm\lambda_k^{\pm}$ и при достаточно больших k это уравнение по теореме Руше имеет столько же корней, сколько нулей у функции $c+\cos\lambda\pi$, то $\lambda_k^{+}=-\lambda_{-k}^{-}$, $\varepsilon_k^{+}=-\varepsilon_{-k}^{-}$.

Распишем подробнее выражения $B_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $\beta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, определенные формулами (9), (10), для чего воспользуемся представлениями (7):

$$B_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{\lambda^j}+R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad \beta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)=-\frac{1}{2}\left[2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{2j}}{\lambda^{2j}}+\right.$$

$$\left.+R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)+R_s\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right]+O\left(\frac{1}{\lambda^2}R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),\qquad(12)$$

где

$$R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{t_1}{(2i\lambda)^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n e^{-2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\left[v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)\right]dt+$$

$$+\frac{2t_1}{(2i\lambda)^{n+2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n e^{-2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\left[u_{(1)-}\left(\frac{\pi}{2}\right)v_+^{(n)}(t)-u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right)v_-^{(n)}\times\right.$$

$$\left.\times(t)\right]dt-\frac{2t_2}{(2i\lambda)^{n+2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)e^{-2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\left[v_+^{(n)}(t)+v_-^{(n)}(t)\right]dt-$$

$$-\frac{2t_1}{(i\lambda)^{n+2}}\left[\eta_+\left(\frac{\pi}{2},\ \lambda\right)+\eta_-\left(\frac{\pi}{2},\ \lambda\right)\right]+\frac{\delta(\lambda)}{(i\lambda)^{n+3}},\qquad(13)$$

$$t_1=I(3,\ 2)-I(4,\ 1),\quad t_2=I(3,\ 4),\quad \eta_\pm\left(\frac{\pi}{2},\ \lambda\right),\quad \delta(\lambda)\in Z_{\frac{\pi}{2}}^2.$$

Используя формулы (12), перепишем равенство (11) в следующем виде:

$$\varepsilon_k^{\pm}=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^{\pm}}{\lambda^j}+\frac{1}{\pi i}\left[-\frac{\delta^{\pm}}{2}\left[R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+R_s\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right]-R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\lambda=2k\pm\theta+\varepsilon_k^{\pm}},\qquad(14)$$

где $c_1^{\pm}=\frac{b_1 i}{\pi}$.

Обозначим через $\hat{\varepsilon}^{\pm}(y)$ решения уравнений

$$\hat{\varepsilon}^{\pm}(y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^{\pm}y^j}{\left(1+y\hat{\varepsilon}^{\pm}(y)\right)^j},\qquad(15)$$

обращающиеся в нуль при $y=0$. Так как $\hat{\varepsilon}^{\pm\prime}(0)=\frac{b_1 i}{\pi}\neq 0$, то в окрестности $y=0$ эти решения аналитичны, и следовательно, при $|y|\leqslant\delta$

$$\hat{\varepsilon}^{\pm}(y)=p_1^{\pm}y+\sum_{j>1}p_j^{\pm}y^j, \tag{16}$$

причем $p_1^{\pm}=\frac{b_1 i}{\pi}$.

Положим в уравнениях (15) $y=\frac{1}{2k\pm\theta}$ и вычтем эти уравнения из (14). Тогда, как следует из формул (14)—(16),

$$\varepsilon_k^{\pm}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j^{\pm}}{(2k\pm\theta)^j}+\frac{1}{\pi i}\left\{-\frac{\delta^{\pm}}{2}\left[R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+R_s\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right]-R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)\right\}\Bigg|_{\lambda=2k\pm\theta+\varepsilon_k^{\pm}}\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

Как показано выше, при достаточно больших k $\varepsilon_k^{+}=-\varepsilon_{-k}^{-}$ и, следовательно, $p_j^{+}=(-1)^{j+1}p_j^{-}$, $j=1, 2, \ldots$, а также

$$\varepsilon_k^{+}=\frac{\varepsilon_k^{+}-\varepsilon_k^{-}}{2}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j^{+}}{(2k+\theta)^j}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\left\{-\frac{1}{2}(\delta^{+}-\delta^{-})\left[R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)+R_s\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)-R_s\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\lambda=2k\pm\theta+\frac{b_1 i}{\pi(2k+\theta)}}\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \tag{17}$$

Используя формулу (13), будем иметь

$$R_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{b_1}{\lambda}\right)\pm R_s\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1+\frac{b_1}{\lambda}\right)=\frac{1}{(2i\lambda)^{n+1}}\left[t_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(-1)^n e^{-2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\mp\right.\right.$$

$$\left.\mp e^{2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right]\cdot\left[v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{i\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(-1)^n e^{-2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\pm e^{2i\lambda\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right]\times$$

$$\times\left[t_1\left[u_{(1)-}\left(\frac{\pi}{2}\right)v_+^{(n)}(t)-u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right)v_-^{(n)}(t)-b_1 i\left(v_+^{(n)}(t)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-v_-^{(n)}(t)\right)\right]-t_2\left(v_+^{(n)}(t)+v_-^{(n)}(t)\right)\right]dt\right]-\frac{t_1}{(i\lambda)^{n+2}}\times$$

$$\times\left[\eta_+\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)+\eta_-\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\pm(-1)^n\left(\eta_+\left(\frac{\pi}{2},-\lambda\right)+\eta_-\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\right)\right]+$$
$$+\frac{\gamma(\lambda)}{(i\lambda)^{n+3}}.$$

Вычисляя значение этого выражения при $\lambda=2k+\theta+\frac{b_1\cdot i}{\pi(2k+\theta)}$ и подставляя его в формулу (17), получим

$$\varepsilon_k^+=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j^+}{(2k+\theta)_j}-\frac{(-1)^n c}{\pi i}\frac{1}{[2(2k+\theta)]^{n+1}}\times$$
$$\times\left[t_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k+\theta)t-\theta\pi+\alpha-\frac{\pi}{2}(n+1)\right][v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)]\,dt-\right.$$
$$-\frac{1}{2k+\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k+\theta)t-\theta\pi+\alpha-\frac{\pi}{2}n\right]\times$$
$$\times\left.[t_1K[v_+^{(n)}(t),\ v_-^{(n)}(t)]-t_2\left(v_+^{(n)}(t)+v_-^{(n)}(t)\right)]\,dt\right]+\frac{t_1\eta_k^+}{(2k+\theta)^{n+2}}+$$
$$+\frac{\alpha_k^+}{(2k+\theta)^{n+3}},$$

где

$$c=\sqrt{(\delta^+-\delta^-)^2-4}=\frac{2}{\sqrt{F_0^2-1}},\quad K\left[v_+^{(n)}(t),\ v_-^{(n)}(t)\right]=$$
$$=u_{(1)-}\left(\frac{\pi}{2}\right)v_+^{(n)}(t)-u_{(1)+}\left(\frac{\pi}{2}\right)v_-^{(n)}(t)-\frac{2b_1 i}{\pi}t\left[v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)\right],$$
$$\alpha=\arcsin\frac{2}{i\sqrt{(\delta^+-\delta^-)^2-4}}=\arcsin\sqrt{1-F_0^2},$$

и, кроме того, так как $\eta_+\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$, $\gamma_+(\lambda)\in Z_{\frac{\pi}{2}}$, то $\sum|\eta_k^+|^2<\infty$, $\sum|\alpha_k^+|^2<\infty$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_k^-=-\varepsilon_{-k}^+=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j^+(-1)^{j+1}}{(2k-\theta)^j}-\frac{c}{\pi i}\frac{1}{[2(2k-\theta)]^{n+1}}\times$$
$$\times\left[t_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k-\theta)t+\theta\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}(n+1)\right][v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)]dt+\right.$$

$$+\frac{1}{2k-\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k-\theta)t+\theta\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}n\right]\times$$

$$\left.\times\left[t_1K\left[v_+^{(n)}(t),\ v_-^{(n)}(t)\right]-t_2\left[v_+^{(n)}(t)+v_-^{(n)}(t)\right]\right]dt\right]+\frac{t_1\eta_k^-}{(2k-\theta)^{n+2}}+$$

$$+\frac{\alpha_k^-}{(2k-\theta)^{n+3}},$$

причем $\sum|\eta_k^-|^2<\infty$, $\sum|\alpha_k^-|^2<\infty$.

Объединяя две последние формулы и полагая $p_j^+=p_j$, $l_j^+=1$, $l_j^-=(-1)^{j+1}$, $l^+=(-1)^n$, $l^-=1$, приходим к равенству (4), и теорема доказана.

Следствие. *Формула* (4) *позволяет заключить, что при $k\to\infty$ справедливы асимптотические формулы*

$$\sqrt{\mu_k^{\pm}}=2k\pm\theta+\sum_{j=1}^{n+2}\frac{p_jl_j^{\pm}}{(2k\pm\theta)^j}-\frac{c\cdot l^{\pm}\cdot t_1}{\pi i\,[2(2k\pm\theta)]^{n+1}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k\pm\theta)t\mp\theta\pi\pm\alpha\mp\frac{\pi}{2}(n+1)\right]\times$$

$$\times\left[v_+^{(n)}(t)-v_-^{(n)}(t)\right]dt+\frac{\beta_k^{\pm}}{(2k\pm\theta)^{n+2}},\tag{18}$$

где $\sum|\beta_k^{\pm}|^2<\infty$.

Если граничная задача (1)—$(\hat{2})$—$(\hat{b})$ типа (1)—(2)—(б) обладает тем свойством, что $\hat{I}(3,\ 2)=\hat{I}(4,\ 1)$ $(\hat{t}_1=0)$, то

$$\sqrt{\hat{\mu}_k^{\pm}}=2k\pm\hat{\theta}+\sum_{j=1}^{n+3}\frac{\hat{p}_jl_j^{\pm}}{(2k\pm\hat{\theta})^j}\mp\frac{\hat{c}\cdot l^{\pm}\cdot 2\hat{t}^2}{\pi i\,[2(2k\pm\hat{\theta})]^{n+2}}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[2(2k\pm\hat{\theta})t\mp\hat{\theta}\pi\pm\hat{\alpha}\mp\frac{\pi}{2}\cdot n\right]\left[v_+^{(n)}(t)+v_-^{(n)}(t)\right]dt+$$

$$+\frac{\hat{\gamma}_k^{\pm}}{(2k\pm\theta)^{n+3}},\tag{19}$$

где $\sum|\hat{\gamma}_k^{\pm}|^2<\infty$.

Теорема 2. *Для того чтобы комплекснозначная функция* $v(x) \in L_2\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *принадлежала пространству* $W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *необходимо и достаточно, чтобы собственные значения задач* (1)—(2)—(6) *и* (1)—$(\hat{2})$—$(\hat{6})$, $I(3, 2) + I(4, 1) = 1$, $I(4, 2) + I(3, 1) \neq \pm 1$, $\hat{I}(3, 2) = \hat{I}(4, 1) = \frac{1}{2}$, $\hat{I}(4, 2) + \hat{I}(3, 1) \neq \pm 1$, *при* $k \to \infty$ *удовлетворяли асимптотическим равенствам*

$$\sqrt{\mu_k^{\pm}} = 2k \pm \theta_1 + \sum_{j=1}^{n+2} \frac{r_j l_j^{\pm}}{(2k \pm \theta_1)^j} + \frac{\delta_k^{\pm}}{k^{n+1}},$$

$$\sqrt{\hat{\mu}_k^{\pm}} = 2k \pm \hat{\theta}_1 + \sum_{j=1}^{n+3} \frac{\hat{r}_j l_j^{\pm}}{(2k \pm \hat{\theta}_1)^j} + \frac{\hat{\delta}_k^{\pm}}{k^{n+2}}, \tag{20}$$

где $\sum |\delta_k^{\pm}|^2 < \infty$, $\sum |\hat{\delta}_k^{\pm}|^2 < \infty$, $l_j^- = (-1)^{j+1}$, $l_j^+ = 1$.

Доказательство. Необходимость этих равенств следует из теоремы 1. Докажем достаточность. Предположим, что $v(x) \in W_2^n\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $m < n$. Покажем, что $m = n$. Для определенности предположим, что $m = 2l$. Согласно формулам (18)—(19)

$$\sqrt{\mu_k^{\pm}} = 2k \pm \theta + \sum_{j=1}^{m+2} \frac{p_j l_j^{\pm}}{(2k \pm \theta)^j} \pm \frac{ct_1 (-1)^{l+1}}{\pi i [2(2k \pm \theta)]^{m+1}} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[2(2k \pm \theta)t \mp \theta\pi \pm \alpha] \left[v_+^{(m)}(t) - v_-^{(m)}(t)\right] dt + \frac{\beta_k^{\pm}}{(2k \pm \theta)^{m+2}},$$

$$\sqrt{\hat{\mu}_k^{\pm}} = 2k \pm \hat{\theta} + \sum_{j=1}^{m+3} \frac{\hat{p}_j \cdot l_j^{\pm}}{(2k \pm \hat{\theta})^j} \pm \frac{\hat{c} \cdot 2\hat{t}_2 \cdot (-1)^{l+1}}{\pi i [2(2k \pm \hat{\theta})]^{m+2}} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[2(2k \pm \hat{\theta})t \mp \hat{\theta}\pi \pm \hat{\alpha}] \left[v_+^{(m)}(t) + v_-^{(m)}(t)\right] dt + \frac{\hat{\gamma}_k^{\pm}}{(2k \pm \hat{\theta})^{m+3}}.$$

Сравнивая эти формулы с условиями (18), находим, что

1) $\theta_1 = \theta$, $r_j = p_j$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, $S_k^{\pm}[v_+^{(m)}(t) - v_-^{(m)}(t)] =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[2(2k \pm \theta)t \mp \theta\pi \pm \alpha] \left[v_+^{(m)}(t) - v_-^{(m)}(t)\right] dt =$$

$$= \frac{c_{m+2}}{2k \pm \theta} A + \frac{\zeta_k^{\pm}}{k}, \tag{21}$$

где $\quad c_{m+2} = r_{m+2} - p_{m+2}, \quad A = \frac{(-1)^{l+1} \cdot \pi i \cdot 2^{m+1}}{c \cdot t_1}, \; \sum |\zeta_k^{\pm}|^2 < \infty;$

$$2)\; \hat{\theta}_1 = \hat{\theta},\; \hat{r}_j = \hat{p}_j,\; 1 \leqslant j \leqslant m+1,\; C_k^{\pm}\,[v_+^{(m)}(t) + v_-^{(m)}(t)] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,[2\,(2k \pm \hat{\theta})\,t \mp \hat{\theta}\pi \pm \alpha]\,[v_+^{(m)}(t) + v_-^{(m)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{\hat{c}_{m+3}}{2k \pm \theta} B + \frac{\hat{\xi}_k^{\pm}}{2k \pm \hat{\theta}}, \tag{22}$$

где $\quad \hat{c}_{m+3} = \hat{r}_{m+3} - \hat{p}_{m+3}, \quad B = \frac{(-1)^{l+1} \pi i 2^{m+1}}{\hat{c}\,\hat{t}_2}, \; \sum |\hat{\xi}_k|^2 < \infty.$

Заметим, что $\varphi_k^{\pm}(t) = \sin\,[2\,(2k \pm \theta)\,t \mp \theta\pi \pm \alpha]$ есть собственные функции граничной задачи, определяемой уравнением (1), в котором $v(x) = 0$, и граничными условиями $hy^{\pm\prime}(0) = y^{\pm\prime}\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

$$Hy^{\pm}(0) = y^{\pm}\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ где } h = \frac{\cos\alpha}{\cos(-\theta\pi + \alpha)}, \quad H = \frac{\sin\alpha}{\sin(-\theta\pi + \alpha)}.$$

При этом сопряженные граничные условия имеют вид $z'(0) = Hz'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $z(0) = hz\left(\frac{\pi}{2}\right)$, а соответствующие собственные функции $g_k^{\pm}(t) = \cos\,[2\,(2k \pm \theta)\,t \mp \alpha]$.

Системы функций $\{\varphi_k^{\pm}(t)\}$, $\{g_k^{\pm}(t)\}$ являются биортогональными и, как легко проверить, $< \varphi_{k_1}^{\pm}(t),\; g_{k_2}^{\pm}(t) > = \pm\, \delta_{k_1, k_2} \frac{\pi}{4} \times \sin(-\theta\pi + 2\alpha)$. Аналогичным образом биортогональны системы функций $\{\psi_k^{\pm}(t)\}$, $\{\chi_k^{\pm}(t)\}$, где $\psi_k^{\pm}(t) = \cos\,[2\,(2k \pm \theta)\,t \mp \theta\pi \pm \alpha]$, $\chi_k^{\pm}(t) = \sin\,[2\,(2k \pm \theta)\,t \mp \alpha]$, причем $< \psi_{k_1}^{\pm}(t),\; \chi_{k_2}^{\pm}(t) > = \mp \mp\, \delta_{k_1, k_2} \frac{\pi}{4} \sin(-\theta\pi + 2\alpha)$. Возвращаясь к формуле (21), получим

$$v_+^{(m)}(t) - v_-^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^+ g_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} t_k^- g_k^-, \quad \text{где}$$

$$t_k^{\pm} = \frac{<\varphi_k^{\pm}(t),\; v_+^{(m)}(t) - v_-^{(m)}(t)>}{<\varphi_k^{\pm}(t)\;\; g_k^{\pm}(t)>} =$$

$$= \pm \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sin(-\theta\pi + 2\alpha)} \left[\frac{c_{m+2}}{2k \pm \theta} A + \frac{\xi_k^{\pm}}{2k \pm \theta}\right].$$

Отсюда следует, что

$$v_{+}^{(m)}(t)-v_{-}^{(m)}(t)=\frac{4}{\pi}\frac{c_{m+2}\cdot A}{\sin(-\theta\pi+2\alpha)}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[2(2k+\theta)t-\alpha]}{2k+\theta}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[2(2k-\theta)t+\alpha]}{2k-\theta}\right]+\frac{4}{\pi\sin(-\theta\pi+2\alpha)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[2(2k+\theta)t-\alpha]}{2k+\theta}\zeta_k^{+}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos[2(2k-\theta)t+\alpha]}{2k-\theta}\zeta_k^{-}\right].$$

Замечая, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 4kt}{k}=\frac{\pi-4t}{2}$, $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, приходим к выводу, что $v^{(m)}+(t)-v^{(m)}-(t)\in W_2^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Аналогичным образом, используя (20), находим, что

$$v_{+}^{(m)}(t)+v_{-}^{(m)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{+}\chi_k^{+}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{-}\chi_k^{-}(t),$$

где

$$d_k^{\pm}=\frac{<\psi_k^{\pm}(t),\ v_{+}^{(m)}(t)+v_{-}^{(m)}(t)>}{<\psi_k^{\pm}(t),\ \chi_k^{\pm}(t)>}=$$

$$=\frac{4B\hat{c}_{m+3}}{\pi(2k\pm\hat{\theta})\sin(-\hat{\theta}\pi+2\hat{\alpha})}\mp\frac{4\xi_k}{k\pi\sin(-\hat{\theta}\pi+2\alpha)}$$

и значит

$$v_{+}^{(m)}(t)+v_{-}^{(m)}(t)=\frac{4\hat{c}_{m+3}B}{\pi\sin(-\theta\pi+2\hat{\alpha})}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[2(2k+\hat{\theta})t-\hat{\alpha}]}{2k+\hat{\theta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[2(2k-\hat{\theta})t+\alpha]}{2k-\hat{\theta}}\right]-\frac{4}{\pi\sin(-\hat{\theta}\pi-2\hat{\alpha})}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{\xi}_k^{+}\sin[2(2k+\hat{\theta})t-\hat{\alpha}]}{2k+\hat{\theta}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{\xi}_k\sin[2(2k-\hat{\theta})t+\hat{\alpha}]}{2k-\hat{\theta}}\right]\in W_2^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Тем самым показано, что $v_{+}^{(m)}(t)-v_{-}^{(m)}(t)\in W_2^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $v_{+}^{(m)}\times$ $\times(t)+v_{-}^{(m)}(t)\in W_2^1\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, и следовательно, $v_{\pm}(t)\in W_2^{m+1}\left[0,\right.$ $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ при любом $m<n$, что означает $v(t)\in W_2^n\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Список литературы: 1. *Гасымов М. Г.* Определение уравнения Штурма-Лиувилля с особенностью по двум спектрам.— Докл. АН СССР, т. 161, № 2, 1965, с. 274—276. 2. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла.— Мат. сборник, 1975. т. 97 (139), № 4, с. 29—36. 3. *Лундина Д. Ш.* Точная зависимость между асимптотическими формулами для собственных значений оператора Штурма-Лиувилля и гладкостью потенциала.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, Харьков, 1978, вып. 29, с. 20—25. 4. *Лундина Д. Ш.* Точная асимптотика для собственных значений одного класса краевых задач Штурма-Лиувилля.— Вопросы мат. физики и функцион. анализа. Киев. Наукова думка, 1978, вып. 2, с. 20—29.

Поступила 18 июля 1978 г.