УДК 513.88

М. Г. ЛЮБАРСКИЙ

О ДИХОТОМИИ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе найдены условия существования регулярной экспоненциальной дихотомии линейных расширений компактных динамических систем. Полученные результаты применяются к системам линейных дифференциальных уравнений.

1. Напомним основные определения (см. также [1, 2]). Пусть X — топологическое пространство; I — числовая ось; E^n — n-мерное пространство Евклида.

Определение 1. *Динамической системой (д. с.)* (X, I) *называется непрерывное отображение прямого произведения* $I \times X$ *в* X *(элемент из* X*, отвечающий паре* $t \in I$, $x \in X$*, обозначим* tx*) такое, что* (I) $0x = x$ $(x \in X)$; (II) $t_1 t_2 x = (t_1 + t_2) x$ $(t_1, t_2 \in I, x \in X)$.

Определение 2. *Д. с.* (X, I) *называется линейным расширением д. с.* (Y, I)*, если* (I) $X = E^n \times Y$; (II) *топология в* X *совпадает с топологией произведения;* (III) *преобразование* tx *удовлетворяет условию* $tx = t(r, y) = (A_y(t) r, ty)$ $(x = (r, y) \in E^n \times Y = X)$, *где* $A_y(t): E^n \to E^n$ *— линейный оператор.*

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства отображения A пространства $I \times Y$ в пространство линейных операторов над E^n:

$$A_y(0) = 1 \text{ (1 — тождественный оператор, } y \in Y); \tag{1}$$

$$A_y(t + \Theta) = A_{\Theta y}(t) A_y(\Theta) \quad (y \in Y, \ t \in I); \tag{2}$$

$$\text{оператор } A_y(t) \text{ имеет обратный } (y \in Y, \ t \in I); \tag{3}$$

$$\text{отображение } A \text{ непрерывно.} \tag{4}$$

Для произвольной точки $y \in Y$ рассмотрим в E^n подпространства: $E_+(y) = \{r \in E^n : \sup\limits_{t>0} \| A_y(t) r \| < +\infty\}$, $E_-(y) =$

$=\{r\in E^n:\sup\limits_{t<0}\|A_y(t)r\|<+\infty\}$. Прямая сумма этих подпространств определена, если они не имеют общих точек, отличных от нуля, или, что то же самое, для всех $r\in E^n$ выполнено равенство $\sup\limits_{t\in I}\|A_y(t)r\|=+\infty$.

Будем говорить в этом случае, что линейное расширение (X, I) д. с. (Y, I) неограничено в точке $y\in Y$.

Определение 3. *Линейное расширение* (X, I) *д. с.* (Y, I) *обладает регулярной экспоненциальной дихотомией* (*кратко*: *э-дихотомией*) *в некоторой точке* $y_0\in Y$, *если* (*I*) (X, I) *неограничено в точке* y_0, *и прямая сумма подпространств* $E_\pm(y_0)$ *совпадает с* E^n; (*II*) *существуют положительные постоянные* N_+, N_-, γ_+, γ_- *такие, что при* $r_+\in E_+(y_0)$ *и* $r_-\in E_-(y_0)$ *справедливы неравенства*

$$\|A_{y_0}(t)r_+\|<N_+e^{-\gamma_+(t-s)}\|A_{y_0}(s)r_+\|, \tag{A}$$

$$\|A_{y_0}(t)r_+\|>N_-e^{\gamma_-(t-s)}\|A_{y_0}(s)r_-\|\ (t\geqslant s,\ t,\ s\in I); \tag{B}$$

(*III*) *взаимно дополнительные проектирующие операторы* $P_+(ty_0)$ *и* $P_-(ty_0)$, *соответствующие расщеплению* $E^n=E_+(ty_0)\dot{+}E_-(ty_0)$ (*см. доказательство леммы 1*), *ограничены на оси*:

$$\sup_{t\in I}\|P_\pm(ty_0)\|<+\infty.$$

Когда д. с. (Y, I) компактна, (III) следует из (II) [2]. Индексом дихотомии назовем число $m(y_0)=\dim E_+(y_0)-\dim E_-(y_0)$, определяющее размерности подпространств $E_\pm(y_0)$.

Используем следующие обозначения: Iy — траектория, проходящая через $y\in Y$; $\overline{Iy}$ — ее замыкание, $A(y_0)$ и $\Omega(y_0)$ — соответственно множества α- и ω-предельных точек этой траектории. Аналогично, $I_\pm y$ и $\overline{I_\pm y}$ положительная, соответственно отрицательная, полутраектория и ее замыкание.

2. Некоторые простые свойства э-дихотомии приведены в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть линейное расширение* (X, I) *д. с.* (Y, I) *обладает э-дихотомией в некоторой точке* $y_0\in Y$. *Тогда* (X, I) *обладает э-дихотомией во всех точках множества* $\overline{Iy_0}$. *Проектирующие операторы* $P_\pm(y)$ *непрерывны на* $\overline{Iy_0}$. *В частности, индекс дихотомии* m *сохраняет постоянное значение на этом множестве.*

Доказательство. Для произвольных $\Theta\in I$ и $y\in Y$ имеет место равенство

$$E_\pm(\Theta y)=A_y(\Theta)E_\pm(y). \tag{5}$$

Действительно, используя свойства (2) и (3), получим

$$E_\pm(\Theta y)=\{r\in E^n:\sup_{t\geq 0}\|A_{\Theta y}(t)r\|<+\infty\}=$$

$$= \{r \in E^n : \sup_{t \geqslant 0} \| A_y(t+\Theta) A_y^{-1}(\Theta) r \| < +\infty\} =$$
$$= \{r \in E^n : A_y^{-1}(\Theta) r \in E_\pm(y)\} = A_y(\Theta) E_\pm(y).$$

Предположим, что в точке y выполнено условие (1) определения 3. Из равенства (5) вытекает, что прямая сумма $E_+ \times \times (\Theta y) \dot{+} E_-(\Theta y)$ подпространств $E_\pm(\Theta y)$ совпадает с E^n, и следовательно, проектирующие операторы $P_\pm(\Theta y)$ определены при всех $\Theta \in I$.

Пусть $r \in E^n$. Для вектора $A_y(\Theta) r$ имеем два представления

$$A_y(\Theta) r = \begin{cases} A_y(\Theta) P_+(y) r + A_y(\Theta) P_-(y) r, \\ P_+(\Theta y) A_y(\Theta) r + P_-(\Theta y) A_y(\Theta) r, \end{cases}$$

соответствующие расщеплению $E^n = E_+(\Theta y) \dot{+} E_-(\Theta y)$. Поэтому для всех $\Theta \in I$ справедливо соотношение

$$P_\pm(\Theta y) A_y(\Theta) = A_y(\Theta) P_\pm(y). \tag{6}$$

Предположим теперь, что в точке $y_0 \in Y$ имеет место э-дихотомия, и пусть $y_1 \in Iy_0$. Последнее означает, что траектория Iy_0 содержит обобщенную последовательность $\{y_k = \Theta_k y_0\}_{k \in K}$, имеющую y_1 своим пределом. Из условия (III) определения 3 следует, что обобщенная последовательность проектирующих операторов $\{P_+(\Theta_k y_0)\}\ k \in K$ ограничена. Выберем какую-либо предельную точку P_+ этой последовательности и подпоследовательность $\{\Theta_k y_0\}_{k \in K'}$ последовательности $\{\Theta_k y_0\}_{k \in K}$, на которой P_+ достигается. Обобщенная последовательность $\{P_-(\Theta_k y_0)\}_{k \in K'}$ имеет своим пределом в таком случае проектирующий оператор $P_- = 1 - P_+$.

Для $t \in I$ и $r \in E^n$ в силу равенств (2), (6) и свойства (4) имеем

$$A_{y_1}(t) P_\pm r = \lim_{k \in K'} A_{\Theta_k y_0}(t) \lim_{k \in K'} P_\pm(\Theta_k y_0) r = \lim_{k \in K'} [A_{y_0}(t+\Theta_k) \times$$
$$\times A_{y_0}^{-1}(\Theta_k)] [A_{y_0}(\Theta_k) P_\pm(y_0) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k)] r =$$
$$= \lim_{k \in K'} A_{y_0}(t+\Theta_k) P_\pm(y_0) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k) r. \tag{7}$$

Так как $P_\pm(y_0) A_{y_0}(\Theta_k) r \in E_\pm(y_0)$ то можно применить неравенства (A) и (B), положив $t \geqslant s$ (t, $s \in I$),

$$\| A_{y_0}(t+\Theta_k) P_\pm(y_0) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k) r \| \leqslant N \pm e^{\mp \gamma_\pm [(t+\Theta_k)-(s+\Theta_k)]} \times$$
$$\times \| A_{y_0}(s+\Theta_k) P_\pm(y_0) A_{y_0}(\Theta_k) r \| < \leqq N_\pm e^{\mp \gamma_\pm (t-s)} \| A_{y_0}(s+$$
$$+\Theta_k) P_\pm(y_0) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k) r \|. \tag{8}$$

Объединяя равенство (7) с неравенством (8), получим $\| A_{y_1} \times \times (t) P_\pm r \| \leqq N_\pm e^{\mp \gamma_\pm (t-s)} \| A_{y_1}(s) P_\pm r \|$. Из этого неравенства следует, что в точке y_1 выполнены условия (I) и (II) определения 3, причем $P_\pm(y_1) = P_\pm$. Так как предельная точка $P_\pm$ и последовательность $\{y_k\}_{k \in K}$ были выбраны произвольно, то последнее означает, что проекторы $P_\pm(y)$ непрерывны на множестве $\overline{I_{y_0}}$. В частности, из связности этого множества следует, что индекс m постоянен на нем.

В заключение доказательства покажем, что в точке y_1 условие (III) также выполнено. Пользуясь соотношениями (2) и (6), получим при $t \in I$

$$P_\pm(t_{y_1}) = A_{y_1}(t) P_\pm(y_1) A_{y_1}^{-1}(t) =$$

$$= \lim_{k \in K'} A_{\Theta_k y_0}(t) P_\pm(\Theta_k y_0) A_{\Theta_k y_0}^{-1}(t) =$$

$$= \lim_{k \in K'} [A_{y_0}(t + \Theta_k) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k)] [A_{y_0}(\Theta_k) \times$$

$$\times P_\pm(y_0) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k)] [A_{y_0}(t + \Theta_k) A_{y_0}^{-1}(\Theta_k)]^{-1} = \lim_{k \in K'} A_{y_0}(t +$$

$$+ \Theta_k) P_\pm(\Theta_k) A_{y_0}^{-1}(t + \Theta_k) = \lim_{k \in K'} P_\pm((t + \Theta_k) y_0).$$

Таким образом, $\sup_{t \in I} \| P_\pm(ty_1 \| \leqslant \sup_{t \in I} \| P_\pm(ty_0) \|$.

3. Из леммы 1 следует, что линейное расширение (X, I), обладающее э-дихотомией в некоторой точке $y_0 \in Y$, неограничено во всех точках множества $\overline{Iy_0}$.

Теорема 1. *Пусть линейное расширение (X, I) компактной д. с. (Y, I) неограничено во всех точках множества $\overline{Iy_0}$. Тогда (X, I) обладает э-дихотомией во всех точках множества $A(y_0)$ и $\Omega(y_0)$. Проектирующие операторы $P_\pm(y)$ непрерывны на этом множестве. В частности, индекс m сохраняет постоянные значения на каждом из множеств $A(y_0)$ и $\Omega(y_0)$.*

Доказательству теоремы предпошлем замечание и три леммы.

Замечание. В дальнейшем будем считать, что линейное расширение (X, I) удовлетворяет условию теоремы 1. Линейное расширение $(\hat{X}, I)$, задаваемое отображением $\hat{t}x = (-t)x$, в данном случае также удовлетворяет этому условию. Подпространства $E_+(y)$ и $E_-(y)$, порождаемые расширением (X, I), являются соответственно подпространствами $E_-(y)$ и $E_+(y)$ для расширения $(\hat{X}, I)$. Поэтому все приведенные ниже утверждения остаются в силе, если одновременно поменять символы $+$ и $-$ друг на друга и изменить знаки неравенств на противоположные.

Обозначим через $\tilde{E}_-(y_0)$ какое-нибудь дополнение к подпространству $E_+(y_0)$.

Лемма 2. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда каждому $M>1$ *отвечает* $T>0$ *такое, что для всех* $t \in I_+$ *и* $r \in \tilde{E}_-(y)$ *выполнено неравенство*

$$M \sup_{0 \leqslant \Theta \leqslant t} \| A_{y_0}(\Theta) r \| \leqslant \sup_{t \leqslant \Theta \leqslant t+T} \| A_{y_0}(\Theta) r \|, \tag{9}$$

а для всех $t \in I$ *и* $r \in E_+(y_0)$ *неравенство*

$$M \sup_{t \leqslant \Theta \leqslant +\infty} \| A_{y_0}(\Theta) r \| \leqslant \sup_{t-T \leqslant \Theta \leqslant t} \| A_{y_0}(\Theta) r \|.$$

Приведем доказательство лишь первого неравенства, так как второе доказывается аналогично.

Предполагая, что утверждение леммы неверно, получим, что для некоторого $M>1$ существуют последовательности $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящиеся к $+\infty$, $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E_-(y_0)$ и $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset I_+$ такие, что

$$M \sup_{0 \leqslant \Theta \leqslant t_k} \| A_{y_0}(\Theta) r_k \| > \sup_{t_k \leqslant \Theta \leqslant t_k+T_k} \| A_{y_0}(\Theta) r_k \|. \tag{10}$$

Введем обозначение $m_k = \sup \| A_{y_0}(\Theta) r_k \|$ $(0 \leqslant \Theta \leqslant t_k)$ и определим последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \in I_+$ так: $\| A_{y_0}(\tau_k) r_k \| = m_k$, $0 \leqslant \tau_k \leqslant t_k$.

Так как пространство Y предполагается компактным, последовательность $\{\tau_k y_0\}_{k \ni K}$ содержит обобщенную подпоследовательность $\{\tau_k y_0\}_{k \in K}$, сходящуюся к некоторому $y_1 \in \overline{I_{y_0}}$. Эта подпоследовательность может быть выбрана так, чтобы также существовал предел $\lim\limits_{k \in K} \dfrac{A_{y_0}(\tau_k) r_k}{\| A_{y_0}(\tau_k) r_k \|} = r$.

Для $t \in I$ имеем:

$$A_{y_1}(t) r = \lim_{k \in K} A_{\tau_k y_0}(t) = \lim_{k \in K} \frac{A_{y_0}(\tau_k) r_k}{\| A_{y_0}(\tau_k) r_k \|} =$$

$$= \lim_{k \in K} A_{y_0}(t+\tau_k) A_{y_0}^{-1}(\tau_k) \frac{A_{y_0}(\tau_k) r_k}{\| A_{y_0}(\tau_k) r_k \|} =$$

$$= \lim_{k \in K} \frac{A_{y_0}(t+\tau_k) r_k}{m_k}. \tag{11}$$

Обобщенная последовательность $\{T_k\}_{k \in K}$ как подпоследовательность последовательности $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ стремится к $+\infty$. Если последовательность $\{\tau_k\}_{k \in K}$ также стремится к $+\infty$, то, начиная с некоторого значения индекса $k \in K$, выполнены неравенства $0 \leqslant t+\tau_k \leqslant t_k + T_k$ и в силу (10), (11):

$$\| A_{y_0}(t+\tau_k) r_k \| \sup_{0 \leqslant \Theta \leqslant t_k+T_k} \| A_{y_0}(\Theta) r_k \| < M m_k;$$

$$\| A_{y_1}(t) r \| \leqslant \lim_{k \in K} \frac{M m_k}{m_k} = M. \tag{12}$$

Последнее неравенство противоречит условию леммы, так как расширение (X, I) в точке $y_1 \in \overline{Iy_0}$ предполагалось неограниченным.

Если же последовательность $\{\tau_k\}_{k\in K}$ содержит ограниченную подпоследовательность $\{\tau_k\}_{k\in K'}$, то последнюю можно выбрать так, чтобы существовал предел $\lim\limits_{k\in K'} \tau_k = \tau$. В этом случае $y_1 = \lim\limits_{k\in K'} \tau_k y_0 = \tau y_0$. Неравенство (12), справедливое теперь лишь при $t > 0$, показывает, что $r \in E_+(ry_0)$ или, что в силу (5) то же самое, $A_{y_0}^{-1}(\tau) r \in E_+(y_0)$.

С другой стороны, по определению

$$r = \lim_{k\in K'} \frac{A_{y_0}(\tau_k) r_k}{\| A_{y_0}(\tau_k) r_k\|} = A_{y_0}(\tau) \lim_{k\in K'} \frac{r_k}{\| A_{y_0}(\tau_k) r_k\|} \quad (r_k \in \widetilde{E}_-(y_0)).$$

Из этого соотношения следует, что

$$A_{y_0}^{-1}(\tau) r = \lim_{k\in K'} \frac{r_k}{\| A_{y_0}(\tau_k) r_k \|} \in \widetilde{E}_-(y_0).$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3. *В условиях теоремы 1 существуют положительные постоянные* N_+, N_-, γ_+, γ_-, *такие что при* $r_+ \in E_+(y_0)$ *и* $r_- \in \widetilde{E}_-(y_0)$ *справедливы неравенства* (A) (*при* $t \geqslant s$, $t, s \in I$) *и* (B) (*при* $t \geqslant s \geqslant 0$, $t, s \in I$).

Остановимся на доказательстве неравенства (B). Неравенство (A) доказывается аналогично.

Пусть числа $M > 1$ и $T > 0$ таковы, что для всех $t, s \in I_+$, $r_- \in E_-(y_0)$ выполнено неравенство (9).

Зададимся произвольными числами $t \geqslant s \geqslant 0$, вектором $r \in E_-(y_0)$ и построим последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{m}$ так:

$$s_0 = s; \sup_{s_0+(k-1)T \leqslant \Theta \leqslant s_0+kT} \| A_{y_0}(\Theta) r \| = \| A_{y_0}(s_k) r \|,$$

$$s_0 + (k-1)T \leqslant s_k \leqslant s_0 + kT \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из неравенства (9) следует

$$M \| A_{y_0}(s_k) r \| \leqslant M \sup_{0 \leqslant \Theta \leqslant s_0+kT} \| A_{y_0}(\Theta) r \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{s_0+kT \leqslant \Theta \leqslant s_0+(k+1)T} \| A_{y_0}(\Theta) r \| = \| A_{y_0}(s_{k+1}) r \| \quad (k = 1, 2 \ldots).$$

Объединяя эти неравенства, получим $M^m \| A_{y_0}(s_0) r \| \leqslant \| A_{y_0}(s_m) r \|$.

Выберем в качестве m число $\left[\frac{t-s}{T}\right] + 1$ ($[x]$ — целая часть x) с тем, чтобы разность $\Theta = s_m - t$ удовлетворяла неравенству $0 \leqslant \Theta \leqslant T$.

Покажем теперь, что неравенство (B) выполнено, если положить

$$\gamma_- = \frac{\ln M}{T}, \quad N_- = \left[\sup_{0 \leqslant \Theta \leqslant T,\ y\in Y} \| A_y(\Theta) \|\right]^{-1}.$$

Действительно,

$$N_-e^{\gamma_-(t-s)}\,\|A_{y_0}(s)\|\,r\| = N_-e^{\frac{\ln M}{T}(t-s)}\,\|A_{y_0}(s)\,r\| \leqslant N_-e^{m\ln M}\times$$
$$\times\|A_{y_0}(s)\,r\| = N_-M^m\|A_{y_0}(s)\,r\| \leqslant N_-\|A_{y_0}(s_m)\,r\| = N_-\|A_{y_0}(t+$$
$$+\Theta)\,r\| = N_-\|A_{ty_0}(\Theta)\,A_{y_0}(t)\,r\| \leqslant N_-\|A_{ty_0}(\Theta)\|\cdot\|A_{y_0}(t)\,r\| \leqslant$$
$$\leqslant N_-\sup_{0<\Theta<T,\; y\in Y}\|A_y(\Theta)\|\cdot\|A_{y_0}(t)\,r\| = \|A_{y_0}(t)\,r\|.$$

Лемма доказана.

Определим семейство проектирующих операторов $\{\widetilde{P}_\pm(ty_0)\}_{t\in I_+}$ соотношением $\widetilde{P}_\pm(ty_0)\,A_{y_0}(t) = A_{y_0}(t)\,\widetilde{P}_\pm(y_0)$ $(t\geqslant 0)$, где проектирующие операторы $P_+(y_0)$ и $P_-(y_0)$ соответствуют расщеплению $E^n = E_+(y_0)\dotplus\widetilde{E}_-(y_0)$.

Лемма 4. *В условиях теоремы 1 семейство проектирующих операторов, определенных выше, ограничено в совокупности по норме.*

Доказательство. Предполагая противное, выберем последовательности $\{\Theta_k\}_{k=1}^{\infty}\subset I_+$ и $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E^n$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\|P_+(\Theta_k y_0)\,r_k\| = +\infty,\quad \|r_k\| = 1\ \ (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Последовательность $\{\Theta_k\}_{k=1}^{\infty}$, очевидно, стремится к $+\infty$.

Так как пространство Y и единичная сфера в E^n компактны, то можно указать обобщенную подпоследовательность $\{\Theta_k\}_{k\in K}$ последовательности $\{\Theta_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой существуют пределы

$$\lim_{k\in K}\theta_k y_0 = y_1\in\overline{I_+y_0},\ \lim_{k\in K}\frac{P_+(\theta_k y_0)\,r_k}{\|P_+(\theta_k y_0)\,r_k\|} = r_+.$$

Из равенства $\widetilde{P}_+(ty_0) + P_-(ty_0) = 1$ следует, что существует также предел $\lim\limits_{k\in K}\dfrac{P_-(\theta_k y_0)\,r_k}{\|P_-(\theta_k y_0)\,r_k\|} = r_-$, и $r_- = -r_+$.

Для $t\in I$ имеем

$$A_{y_1}(t)\,r_\pm = \lim_{k\in K}A_{\theta_k y_0}(t)\,\frac{\widetilde{P}_\pm(\theta_k y_0)\,r_k}{\|\widetilde{P}_\pm(\theta_k y_0)\,r_k\|} =$$

$$= \lim_{k\in K}A_{y_0}(t+\theta_k)\,A_{y_0}^{-1}(\theta_k)\,\frac{A_{y_0}(\theta_k)\,\widetilde{P}_\pm(y_0)\,A_{y_0}^{-1}(\theta_k)\,r_k}{\|\widetilde{P}_\pm(\theta_k y_0)\,r_k\|} =$$

$$= \lim_{k\in K}A_{y_0}(t+\theta_k)\,\widetilde{P}_\pm(y_0)\,\frac{A_{y_0}^{-1}(\theta_k)\,r_k}{\|\widetilde{P}_\pm(\theta_k y_0)\,r_k\|}.$$

Векторы $\widetilde{P}_{\pm}(y_0) \ldots$ принадлежат подпространствам $E_{\pm}(y_0)$ соответственно. Поэтому для произвольных $t \geqslant s$ $t, s \in I$ неравенства

$$\left\| A_{y_0}(t+\theta_k)\widetilde{P}_{\pm}(y_0)\frac{A_{y_0}^{-1}(\theta_k)r_k}{\|\widetilde{P}_{\pm}(\theta_k y_0)r_k\|}\right\| \leqslant N_{\pm}e^{\mp\gamma_{\pm}(t-s)}\left\| A_{y_0}(s+\theta_k) \times \right.$$

$$\left. \times \widetilde{P}_{\pm}(y_0)\frac{A_{y_0}^{-1}(\theta_k)r_k}{\|\widetilde{P}_{\pm}(\theta_k y_0)r_k\|}\right\| \qquad (13)$$

вытекают из леммы 3 при условии если $s+\theta_k \geqslant 0$. Последнее условие выполнено для каждого $s \in I$, начиная с некоторого значения индекса $k \in K$, зависящего от s, так как последовательность $\{\theta_k\}_{k\in K}$ стремится к $+\infty$.

Переходя к пределу в неравенствах (13), получим, что при $t \geqslant s$ $\|A_{y_1}(t)r_{\pm}\| \leqslant N_{\pm}e^{\mp\gamma_{\pm}(t-s)}\|A_{y_1}(s)r_{\pm}\|$. Так как $r_{-}=-r_{+}$, то эти неравенства противоречат друг другу.

Доказательство теоремы 1 во многом повторяет рассуждения, с помощью которых доказана лемма 1.

Пусть y_1 — предельная точка траектории Iy_0. Предположим для определенности, что $y_1 \in \Omega(y_0)$. Это означает, что существует обобщенная последовательность $\{\theta_k\}_{k\in K} \subset I_{+}$, стремящаяся к $+\infty$ и такая, что $\lim\limits_{k\in K}\theta_k y_0 = y_1$. В силу леммы 4 последовательность проектирующих операторов $\{P_{+}(\theta_k y_0)\}$ ограничена. Выберем какую-либо предельную точку $\widetilde{P}_{+}$ этой последовательности и подпоследовательность $\{\theta_k y_0\}_{k\in K'}$, на которой $\widetilde{P}_{+}$ достигается. Обобщенная последовательность $\{P_{-}(\theta_k y_0)\}_{k\in K'}$ имеет своим пределом при этом проектор $P_{-}=1-\widetilde{P}_{+}$.

Для $t \in I$ и $r \in E^n$ имеем, подобно равенству (7),

$$A_{y_1}(t)\widetilde{P}_{\pm}r = \lim_{k\in K'} A_{y_0}(t+\theta_k)\,\widetilde{P}_{\pm}(y_0)A_{y_0}^{-1}(\theta_k)r.$$

Так как векторы $\widetilde{P}_{\pm}(y_0)A_{y_0}(\theta_k)r$ принадлежат соответственно подпространствам $E_{+}(y_0)$ и $E_{-}(y_0)$, то можно в силу леммы 3 применить неравенства (A) и (B), предполагая, что $t \geqslant s$ и в случае (B) $s+\theta_k \geqslant 0$. Аналогично неравенству (8) получим

$$\|A_{y_0}(t+\theta_k)\widetilde{P}_{\pm}(y_0)A_{y_0}^{-1}(\theta)r\| \leqslant N_{\pm}e^{\pm\gamma_{\pm}(t-s)}\|A_{y_0}(s+\theta_k)\times$$

$$\times \widetilde{P}_{\pm}(y_0)A_{y_0}^{-1}(\theta_k)r\|. \qquad (14)$$

Последовательность $\{\theta_k\}_{k\in K'}$ стремится к $+\infty$. Поэтому для каждого $s \in I$, начиная с некоторого значения индекса $k \in K'$, зависящего от s, выполнено неравенство $s+\theta_k \geqslant 0$ и, следовательно, неравенство (14).

Переходя к пределу в (14), получим, что при $t \geqslant s$

$$\| A_{y_1}(t) \tilde{P}_{\pm} r \leqslant N_{\pm} e^{\mp \gamma_{\pm}(t-s)} \| A_{y_1}(s) \tilde{P}_{\pm} r \|.$$

Как и при доказательстве леммы 1, из этих неравенств следует, что в точке y_1 выполнены условия (I) и (II) определения 3; проекторы $\tilde{P}_{\pm}(y)$, определенные на положительной полутраектории $I_+ y_0$, непрерывно продолжаются на ее замыкание $\overline{I_+ y_0}$ и на множестве $\Omega(y_0)$ совпадают с проекторами $P_{\pm}(y)$. В частности, индекс m сохраняет постоянное значение на $\Omega(y_0)$, как на связном множестве.

При сделанном в доказываемой теореме предположении о компактности пространства Y, условие (III), т. е. ограниченность проекторов $\{P_{\pm}(y)\}$ на траектории Iy_1, сразу же вытекает из их непрерывности на множестве $\overline{Iy_1} \subset \Omega(y_0)$.

4. Выделим в качестве леммы следующее утверждение, справедливость которого установлена при доказательстве теоремы 1.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1, и* $\{\theta_k\}_{k \in K}$ *обобщенная последовательность, стремящаяся к* $+\infty$ *и такая, что* $\lim\limits_{k \in K} \theta_k y_0 = y_+$. *Тогда* $\lim\limits_{k \in K} P_{\pm}(\theta_k y_0) = P_+(y_+)$.

Теорема 2. *Линейное расширение* (X, I) *компактной д. с.* (Y, I) *обладает э-дихотомией в некоторой точке* $y_0 \in Y$ *в том и только в том случае, если* (I) (X, I) *неограничено в каждой точке замыкания ее траектории —* $\overline{Iy_0}$, *и* (II) *значения индекса* m, *принимаемые на множествах* $A(y_0)$ *и* $\Omega(y_0)$ *(см. теорему 1), совпадают.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из леммы 1. Докажем их достаточность.

Пусть $y_+ \in \Omega(y_0)$, а $y_- \in A(y_0)$. Обозначим символами m_+ и m_- значения индекса m на множествах $\Omega(y_0)$ и $A(y_0)$ соответственно.

Из леммы 5 следует, что $\dim E_+(y_0) = \dim E_+(y_+)$. Аналогично (см. замечание п. 3) $\dim E_-(y_0) = \dim E_-(y_-)$. Таким образом, $\dim E_+(y_0) + \dim E_-(y_0) = \dim E_+(y_+) + \dim E_-(y_-) = \frac{n+m_+}{2} + \frac{n-m_-}{2} = n + \frac{m_+ - m_-}{2} = n$.

По условию теоремы 2 расширение (X, I) неограничено в точке y_0. Поэтому прямая сумма подпространств $E_{\pm}(y_0)$ совпадает с E^n. Утверждение теоремы вытекает теперь непосредственно из лемм 3 и 4.

Замечание. Условие (II) теоремы 2 может быть не выполнено при выполнении условия (I) той же теоремы, как показывает пример, приведенный в конце статьи. При выполнении условия (I) заведомо выполнено условие (II), если $A(y_0) \cap \Omega(y_0) \neq \varnothing$ или $y_0 \in A(y_0) \cup \Omega(y_0)$.

5. Специальные расширения динамических систем, которые даются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dr}{dt} = y_0(t)\,r \quad (r \in E^n, \quad t \in I), \tag{$*$}$$

где y_0 — ограниченная, равномерно непрерывная на всей оси матрица-функция, были исследованы Э. Мухамадиевым [3]. Результаты, которые получаются из общих теорем предыдущих пунктов, для этого случая близки к результатам Э. Мухамадиева.

Пусть y_0 — ограниченная, равномерно непрерывная на всей оси матрица-функция. Определим пространство Y как замыкание в топологии равномерной сходимости на каждом компакте множества функций вида $\{y_\tau(t) = y_0(t+\tau)\}_{\tau \in I}$, наделенное той же топологией. Отображение $ty(\tau) = y(t+\tau)$ является д. с. и называется системой Бебутова (Y, I) (см., например, [1]).

Из равномерной непрерывности и ограниченности функции $y_0(t)$ вытекает компактность этой д. с.

В случае системы Бебутова множества $A(y_0)$ и $\Omega(y_0)$ могут быть описаны как совокупности матриц-функций, являющихся пределами всевозможных последовательностей вида $\{y_0(\tau + t_k)\}_{t_k \to -\infty}$, $\{y_0(\tau + t_k\}_{t_k \to +\infty}$ в топологии равномерной сходимости на каждом компакте. В рассматриваемом случае эта топология совпадает с топологией поточечной сходимости.

Линейное дифференциальное уравнение ($*$) следующим образом задает линейное расширение системы Бебутова (см. [1]). В качестве пространства X выберем произведение топологических пространств E^n и Y. Отображение tx определим равенством $tx = t(r, y) = (A_y(t)\,r, ty)$, $(t \in I,\ x = (r, y) \in E^n \times Y)$, где $A_y(t)$ — матрица Коши уравнения $\frac{dr}{dt} = y(t)\,r$.

Сформулируем теоремы 1 и 2 для этого специального линейного расширения.

Теорема 1. *Пусть уравнение* ($*$) *и его «предельные» уравнения*

$$\frac{dr}{dt} = y(t)\,r \quad (y \in A(y_0) \cup \Omega(y_0))$$

не имеют ограниченных на всей оси решений. Тогда каждое из предельных уравнений э-дихотомично. Индекс дихотомии один и тот же у всех уравнений из $A(y_0)$, *так же как и у всех уравнений из* $\Omega(y_0)$.

Теорема 2. *Уравнение* ($*$) *э-дихотомично в том и только в том случае, если* (*I*) *уравнение* ($*$) *и его предельные не имеют ограниченных решений, и* (*II*) *э-дихотомия решений каждого предельного уравнения, имеющая место в силу теоремы 1, характеризуется одним и тем же индексом.*

Следующий пример показывает, что условие II не зависит от условия I.

Пусть y_0 — непрерывная на числовой оси матрица-функция такая, что существуют пределы $\lim_{t \to \pm\infty} y_0(t) = y_\pm$ и спектр матрицы y_+ лежит в правой полуплоскости, а y_- — в левой. Ясно, что в этом случае условие (I) теоремы выполнено, а (II) — нет.

Автор признателен Б. Я. Левину за ряд ценных советов и обсуждение полученных результатов.

Список литературы: 1. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев, 1975. 212 с. 2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Наука, 1970. 411 с. 3. *Мухамадиев Э.* Условия фредгольмовости дифференциальных операторов в пространстве ограниченных и равномерно непрерывных на оси функций. — Докл. АН ТССР, 1974, т. 17, вып. 4, с. 13—16.

Поступила 11 мая 1978 г.